الاحصاء التطبيقي بنظام SPSS

الأستاذ
عزام عبد الرحمن صبري





بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ إِلَى عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

صدق الله العظيم

الإحصاء التطبيقي

بنظام SPSS

الإحصاء التطبيقي بنظام SPSS

الأستاذ
عزام عبد الرحمن صبري

الطبعة الأولى
2015م - 1436هـ



الدار المنهجية
للنشر والتوزيع



رقم التصنيف:519.50285

الإحصاء التطبيقي بنظام SPSS

أ. عزام عبد الرحمن صبري

الواصفات: الإحصاء الرياضي // الحواسيب /

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2014/10/4912)

ISBN 978-9957-593-47-6 ردمك

عمان – شارع الملك حسين – مجمع الفحيص التجاري

هاتف: 4611169 6 962+ ص.ب 922762 عمان ـ 11192 الأردن

DAR ALMANHAJIAH Publishing - Distributing

Tel: + 962 6 4611169 P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan

E-mail: info@almanhajiah.com

الفصل الأول
مراجعة عامة

الفصل الثاني
التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

الفصل الثالث
الارتباط والانحدار

الفصل الرابع
نظرية الاحتمالات

الفصل الخامس
المتغيرات العشوائية
ذات البعد الواحد

الفصل السادس
التوزيعات الاحتمالية الهامة

الفصل السابع
تقدير الفترات

الفصل الثامن
اختبار الفرضيات

الفصل التاسع
تحليل التباين

الفصل العاشر
تطبيقات الحاسوب

المقدمة

نظراً إلى أهمية الإحصاء التطبيقي كمادة تطبيقية في شتى المجالات تساعد متخذي القرارات في كيفية اتخاذ القرار باستخدام أحد الطرق الإحصائية، لذا ارتأينا أن يكون هناك تسلسل في اختيار فصول هذا الكتاب بحيث يكون هناك ترابط بين الفصول وبالتالي تكون هناك جدوى من تقديم هذا الكتاب للباحث ولمتخذ القرار على حد سواء فقد تناولنا في الفصل الأول مراجعة عامة لنظرية المجموعات و مراجعة لطرق إيجاد الوسط الحسابي وطرق إيجاد التباين والتي سبق وأن تطرقنا لها في كتاب الإحصاء التطبيقي.

كذلك تناولنا في الفصل الثاني مبدأ العد وطرق الاختبار ونظرية ذات الحدين وذلك نظرياً لأهميتها في نظرية الاحتمالات.

أما الفصل الثالث فقد تناولنا مفهوم الارتباط والانحدار البسيط كمقدمة للارتباط الجزئي والمتضاعف والذي يسهم إسهاماً فعالاً في كثير من المجالات التطبيقية أما الفصل الرابع والخامس فقد تناولنا نظرية الاحتمالات والمتغيرات العشوائية وتوقعاتها أما الفصل السادس فقد استعرضنا أهم التوزيعات الاحتمالية وتطبيقاتها. وفي الفصل السابع تناولنا أهم الطرق لإيجاد فترات الثقة وتعتبر من أهم مرتكزات الإحصاء التطبيقي.

أما الفصل الثامن فقد تناولنا أهم اختبارات الفرضيات والتي تساعد متخذي أصحاب القرار في اتخاذ قراراتهم. أما الفصل التاسع فقد قدمنا موضوعاً هاماً من مواضيع التحليل الإحصائي وهو تحليل التباين.

أما الفصل العاشر فهو فصل يتعلق بالحاسوب وطرق استخدامه وحل بعض الطرق الإحصائية من خلاله. والله أسأل أن أكون قد وفقت في تقديم هذا الكتاب راجياً من الزملاء إبداء أي ملاحظات حتى نأخذ فيها في الطبعات القادمة وقبل الختام فإنه لا يسعني إلا أن أتقدم بالشكر الجزيل لكل من قدم ملاحظات وإلى كل من أسهم بإخراجه وأخص بالذكر فريق الصف المتكون من الأخوة سلام بولص وأحمد أديب منير الذين بذلوا جهوداً مضنية لإخراجه.

والله ولي التوفيق !!!

المؤلف عزام عبد الرحمن صبري

الفصل الأول
مراجعة عامة

الفصل الأول
مراجعة عامة

1-1 المجموعات(Sets)

1-1-1) مفهوم المجموعة

تعريف (1-1) : المجموعة ببساطة هي تجمع من أشياء مميزة عن بعضها ، هذه الأشياء قد تكون مجموعة أرقام مميزة عن بعضها أو غيرها من الأشياء الأخرى

ضمن حاصرتين(قوسين مموجين) على النحو : { } ، وتفصل عناصرها فواصل ويعبر عن إسمها برمز باستخدام أحد الحروف الأبجدية : x , y , a , b, ...

مثال(1-1) : المطلوب كتابة المجموعة التي تمثل الأعداد الطبيعية التي تأخذ قيما اقل من 5.

الحل: $X=\{1,2,3,4\}$ مجموعة منتهية لإن عناصرها تقف عند القيمة 4 .

مثال(2-1) : المطلوب كتابة مجموعة الأعداد الزوجية الطبيعية والتي تبدأ بالعدد 2 .

الحل: $X=\{ 2,4,6,\ldots.. \}$ وكما هو ملاحظ فإن هذه المجموعة غير منتهية لأنه لايمكن حصر عدد عناصرها .

مثال(3-1) : المطلوب كتابة مجموعة أيام الأسبوع الرسمية .

الحل: {السبت ، الأحد ، الأثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة } وهذه مجموعة منتهية لأنه أمكن حصر عدد عناصرها.

مثال(4-1): 1 – المطلوب تكوين خمس مجموعات منتهية .

2 - المطلوب تكوين خمس مجموعات غير منتهية .

الحل: 1 – المجموعات المنتهية (Finite Sets)

$X=\{a,b,c,d\}$

$Z=\{1,3,5,7\}$ للتعبير عن مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية : 1?x?7

{ ورقة ، كتاب ، قلم } =Y للتعبير عن بعض الأدوات التي يستخدمها الطالب

{ رياضيات ، فيزياء ، كيمياء } =A للتعبير عن المباحث العلمية .

{ مربع ، مستطيل ، دائرة } =B للتغير من بعض الأشكال الهندسية .

(1-1-2) المجموعات غير المنتهية (Infinite Sets)

$X=\{1,3,5,7,9,\ldots\}$ ، مجموعة الأعداد الفردية الطبيعية غير المنتهية.

$N^*=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ ، للتعبير عن مجموعة الأعداد الطبيعية غير المنتهية .

مجموعة الأعداد الحقيقية =R .

مجموعة الأعداد الصحيحة =Z .

مجموعة الأعداد النسبية =Q .

1-1-3 طرق وصف المجموعات :

1-1-3-1 الطريقة الصريحة: أي بذكر عناصر المجموعة بشكل واضح .

مثال: (1-5) المطلوب كتابة المجموعة التي تمثل اسماء الجامعات الاردنية الحكومية وذلك بذكر عناصر ها.

الحل: المجموعة المطلوبة

{ الأردنية ، مؤتة ، اليرموك ، العلوم والتكنولوجيا ، آل البيت } =A .

1-1-3-2 الطريقة الضمنية : أي عدم ذكر عناصر المجموعة صراحة .

مثال (1-6): المطلوب كتابة المجموعة التي تمثل الأعداد الأولية الطبيعية وأقل من 20 وذلك بشكل ضمني او وصفي .

الحل: $Y=$ { x : x عدد أولي طبيعي أقل من عشرين } أو بأسلوب أخر

$Y=$ { $x : x \in N^*, x<20, x$: عدد أولي }

1-1-4 الأنتماء وعدم الأنتماء:

تعريف (1-2) : نقول للعنصر a بأنه ينتمي (Element of) للمجموعة X ، اذا كان العنصر a هو أحد عناصر المجموعة X ، وبشكل رموز نكتب $a \in X$.
وتقرأ a عنصر في X أو ينتمي الى المجموعة وتقرأ a ليس عنصرا في X أو لاينتمي الى المجموعة X .

مثال(1-7): المطلوب وضع إشارة الأنتماء أو عدم الأنتماء في الفراغات التالية:

الحل: $a \in \ldots \{3,5,a,4\}$

$7 \notin \ldots \{17,3,1.27\}$

$13 \in \ldots \{3,1,13,43\}$

حيث من الجدير بالملاحظة عدم أهمية ترتيب العناصر داخل المجموعة.

مثال (1-8) : ضع رمز الانتماء وعدم الانتماء في الفراغات التالية :

1) 3 .... {3, 6, 2}

2) {5} ......{5, 7, 2}

3) 0 ....{1, 2, 9}

4) {7} ......{1, 6, {7}}

5) 9 ....{2, 7, 11, 99}

الحل : 1) $\in$ 2) $\notin$ 3) $\notin$ 4) $\in$ 5) $\notin$

1-1-5 : تساوي مجموعتين

تعريف: تتساوى المجموعتان B,A إذا كان لهما نفس عدد العناصر ولهما نفس العناصر وكانت كل من المجموعتين محتواه في الأخرى أي إذا كان

$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A=B$

مثال (1-9) : هل المجموعتان A {2,4,6,8} , B = {4,6,8,2} متساويتين.

الحل: المجموعتان B,A متساويتان لأن لهما نفس العناصر والعدد.

ملاحظة: المجموعات لا تسمح بتكرار العنصر داخلها ولا تهتم بترتيب العناصر .

مثال (1-10) : هل المجموعتان A={1,7,11} ، B={11,5,7} متساويتان .

الحل: ليس لهما نفس العناصر وعليه فإن A≠B على الرغم من تساوي عدد العناصر.

1-1-6 : المجموعات الجزئية

تعريف : يقال للمجموعة A بأنها مجموعة جزئية (أو محتواة) في المجموعةB إذا كان كل عنصر في المجموعة A ينتمي للمجموعة B وسيرمز للاحتواء بالرمز $\subset$ وعليه يمكن كتابة هذا التعريف بشكل رموز .

$A \subset B \Rightarrow a \in A, a \in B$

مثال (1-11) : لتكن المجموعتان $A=\{2,4,6\}$ ، $B=\{1,5,2,4,6\}$ فهل $A\subset B$.

الحل: نعم لأن كل عنصر في A هو عنصر في B.

مثال (1-12) : لتكن المجموعتان $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,c,e,d,f\}$ فهل $A \subset B$؟

الحل: المجموعة $A \not\subset B$ لأن العنصر $b \in A$ لكن $b \notin B$.

ومن المفيد أن نعرف أنه لأية مجموعة فإنه يمكن ايجاد عدد من المجموعات الجزئية لهذه المجموعة من القاعدة التالية

قاعدة : عدد المجموعات الجزئية = 2^n :n عدد عناصر المجموعة الأصلية A.

ملاحظة: لا بد من التعرف على المصطلحات التالية حتى نستطيع استخدامها مستقبلا.

* سنرمز للرمز $n(A)$ للدلالة على عدد عناصر المجموعة .

* سنرمز للرمز $q(A)$: مجموعة المجموعات الجزيئية للمجموعة A.

ونسمي $q(A)$ بقوة المجموعة A .

*$n(q(A))$:عدد المجموعات الجزئية للمجموعة .

مثال (1-13) : اذا كانت $A=\varnothing$ فأوجد $n(A)$، $q(A)$ ، $n(q(A))$

الحل: $n(A) = 0$ لأن المجموعة A خالية من العناصر.

$q(A)= \varnothing$

$n(q(A)) = 2^0= 1$

مثال (1-14) : اذا كانت $A=\{2\}$ فأوجد $n(A)$ ، $q(A)$ ، $n(q(A))$.

الحل: نجد أولا عدد عناصر المجموعة A $\quad n(A)=1$

المجموعات الجزئية للمجموعة A $\quad q(A)=\{\varnothing,\{2\}\}$

عدد المجموعات الجزئية $\quad n(q(A))=2^1 = 2$

مثال (1-15) : لتكن $A = \{3,5\}$, أوجد $n(A)$, $q(A)$, $n(q(A))$

الحل: نجد عدد عناصر المجموعة الأصلية $\quad$ a) $n(A) =2$

نجد المجموعات الجزئية للمجموعة A $\quad$ b) $q(A) = \{\varnothing,\{2\},\{5\},\{2,5\}\}$

نجد عدد المجموعات الجزئية $\quad$ c) $n(q(A)) =2^2 = 4$

ملاحظة: 1) $\varnothing \subset A$ كل مجموعة خالية مجموعة جزئية من أية مجموعة .

2) $A \subset A$ كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها

مثال (1-16) : ضع اشارة $\in, \notin, \subset, \not\subset$ في الفراغات التالية :

1) {3}.........{2,3,5}

2) {5}...........{2,4,{5},{9} , 7}

3)∅..............{2,9,10}

4) ∅ ....{{0} ,6,8}

5) 0 ....{ {{0},3,7}

الحل:

1) ⊂ 2) ∈ 3) ⊂ 4) ⊂ 5)∉

1-1-7 العمليات على المجموعات

كما أن هناك عمليات حسابية كالجمع والضرب الإعتيادي على الأعداد كذلك فإن هناك عمليات أخرى على المجموعات نسميها الإتحاد والتقاطع والطرح والمتمم وإلى ما شابه ذلك من عمليات ، وسنتطرق إلى هذه العمليات بشيء من التفصيل وبالقدر الذي يتطلبه التحليل الرياضي .

1-1-7-1 عملية الإتحاد

تعريف : أن عملية الإتحاد التي يرمز لها بالرموز ∪ تتم بين مجموعتين او اكثر وتعني عناصر المجموعتين المتحدتين ما عدا المتكرر منها وبشكل رموز،

$a \in (A \cup B) \Leftrightarrow a \in A$ أو $a \in B$

مثال (1-17) : لتكن $A = \{3,7,4\}$, $B = \{2,5,1\}$ والمطلوب إيجاد $A \cup B$

الحل: إن ناتج الاتحاد هو

$A \cup B = \{3,7,4,2,5,1\}$

ملاحظة: $A \cup A = A$, $A \cup \varnothing = A$.

1-1-7-2 عملية التقاطع

تعريف : نقصد بعملية التقاطع اخذ العناصر المشتركة بين مجموعتين او أكثر . ويرمز لها بالرمز$\cap$ وبشكل رموز يمكن كتابة ذلك على النحو:

$a \in A\cap B \Rightarrow a \in A , a \in B$

مثال(1-18) : لتكن $A=\{4,7,9\}$ ، $B=\{7,3,2\}$ أوجد $A\cap B$

الحل: أن ناتج عملية التقاطع هو

$A\cap B = \{7\}$

1-1-7-3 طرح المجموعات

تعريف : نعني بطرح المجموعة B من المجموعة A هو أن نطرح من A العناصر المشتركة مع المجموعة B ويرمز له بشكل A/B او A-B ويمكن التعبير عنه بشكل رموز:

$A- B = A - (A \cap B)$ أو $A\cap \overline{B}$

وكذلك $B- A = B - (A \cap B)$ أو $B \cap \bar{A}$

مثال (1-19) : لتكن$A = \{4,7,9,11\}$ ، $B = \{5,2,9,10,11\}$

أوجد $A - B$, $B - A$

الحل: لايجاد $A-B = A-(A\cap B)$ نجد أولاً

$A\cap B = \{ 9,11\}$

$A- B = A - (A\cap B) = \{4,7,9,11\} = \{4,7\}$

$B - A = B - (A\cap B) = \{ 5,2,9,10,11\} - \{9,11\} = \{5,2,10\}$

مثال (1-20) : لتكن $A= \{ x:x \in N^{*}, 10\}$

$B= \{ x:x$ عدد فردي طبيعي $<10\}$

والمطلوب إيجاد $A\cap B , A \cup B , A- B, B- A$

الحل: نكون المجموعتين B,A بذكر عناصرهما

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$B = \{1,3,5,7,9\}$
$A \cap B = \{1,3,5,7,9\}$
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$
$A - B = \{2,4,6,8\}$
$B - A = \{\ \}$

1-1-8 المجموعتان المنفصلتان

تعريف: يقال للمجموعتين B,A بأنهما منفصلتان اذا كان $A \cap B = \varnothing$ اي لا يوجد عناصر مشتركة

مثال (1-21) : لتكن $A = \{4,9,11\}$, $B = \{1,5,7\}$ فهل المجموعتان B, A منفصلتان؟

الحل: بما أن $A \cap B = \varnothing$ $\therefore$ فالمجموعتان منفصلتان.

1-1-9 المجموعة المتممة

تعريف : يقال للمجموعة $\overline{A}$ بأنها متممة للمجموعة A بالنسبة للمجموعة U (المجموعة الكلية) إذا كان $a \in A$ فإن $a \notin \overline{A}$

وقبل اعطاء امثلة على ذلك لابد من ذكر الخصائص التالية:

1) $A \cap \overline{A} = \varnothing$
2) $A \cup \overline{A} = U$
3) $\overline{A} \cap U = \overline{A}$
4) $A \cap U = A$
5) $A \cup U = U$
6) $\overline{A} \cup U = U$
7) $\overline{A} \cap \overline{A} = \overline{A}$
8) $U \cup \varnothing = U$
9) $U \cap \varnothing = \varnothing$

10) قانونا دي مورجان

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

مثال (1-22) : لتكن $A = \{4,6,8,10\}$ ، $B = \{2,8,12,18\}$ ،

$U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ أوجد ما يلي

1) $\overline{A}$	2) $\overline{B}$	3) $\overline{A} - \overline{B}$	4) $\overline{A \cup B}$
5) $\overline{A \cap B}$	6) $\overline{A} \cap \overline{B}$	7) $\overline{A} - \overline{B}$	8) $\overline{A} - B$
9) $(\overline{A} \cup A) - B$	10) $\overline{A \cap B} / \overline{A \cup B}$		

الحل:

1) $\overline{A} = U - A = \{2,12,14,16,18\}$

2) $\overline{B} = U - B = \{4,6,10,14,16\}$

3) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = U - (A \cap B) = \{2,4,6,10,12,14,16,18\}$

4) $\overline{A \cup B} = U - (A \cup B)$

نجد أولا $A \cup B = \{4,6,8,10,2,12,18\}$، ثم نجد المطلوب من السؤال

$\overline{A \cup B} = \{14,16\}$

5) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ من خصائص قانونا دي مورجان

نجد أولاً $A \cap B = \{8\}$

$\overline{A \cap B} = U - (A \cap B) = \{2,4,6,10,12,14,16,18\}$

6) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \{14,16\}$

7) $\overline{A} - \overline{B} = \overline{A} - (\overline{A} \cap \overline{B}) = \{2,12,14,16,18\} - \{14,16\} = \{2,12,18\}$

8) $\overline{A} - B = \{2,12,14,16,18\} - \{2,8,12,18\} = \{14,16\}$

9) $(\overline{A} \cup A) - A = \{2,12,14,16,18\} = \overline{A}$

10) $(A \cap B) - (\overline{A \cup B}) = \{8\} - \{14,16\} = \{8\}$

1-1-10 المجموعات اللانهائية

1-1-10-1 المجموعات المحدودة

نبدأ بدراسة هذه المجموعات باعطاء التعريف التالي .

تعريف: اذا كانت $A \subset R$ تسمى A مجموعة محدودة من أعلى اذا وجد عدد مثل M بحيث ان $A \leq M$ ونسمي M حدا اعلى للمجوعة A .

مثال (1-23) : لتكن المجموعة $A=[2,7]$ اوجد الحد الأعلى لهذه المجموعة

الحل: نلاحظ أن $A \leq 7 \ \forall a \in A$

$\therefore$ 7 هو الحد الأعلى للمجموعة A

تعريف: تسمى المجموعة A مجموعة محدودة اذا كانت محدوده من أسفل ومحدودة من أعلى

مثال (1-24) : لتكن $A=[-2,7]$ فهل هذه المجموعة محدودة واذا كانت كذلك فأوجد حديها الأعلى والأسفل.

الحل: المجموعة محدودة لأن لها حد أدنى يساوي -2 وحد أعلى يساوي 7

مثال (1-25) : لتكن $A = [1, \infty)$ فهل المجموعة محدودة .

الحل : المجموعة $A = [1, \infty)$ ليست محدودة لأنه لا يوجد لها حد أعلى انما لها حد أدنى يساوي 1.

مثال (1-26) : لتكن المجموعة $B = (-\infty, 5)$ فهل المجموعة محدودة

الحل: المجموعة B ليست محدودة لأنه لا يوجد لها حد أدني انما لها حد أعلى هو 5

تعريف : لتكن $A\subset R$، $b \in R$ تسمى b بالحد الأعلى للمجموعة A اذا كان $\forall a\in A, b\in a$ تسمى اصغر حد اعلى للمجموعة .

مثال (1-27) : لتكن $A=[-3,5]$ اوجد اصغر حد أعلى للمجموعة A .

الحل: نلاحظ ان 5 هو اصغر حد أعلى للمجموعة A لأن الأعداد ,7,6,5 هي حدود عليا واصغرها العدد 5

1-1-10-2 المجموعات المعدودة Countable Sets :

تعريف: اذا كانت المجموعة A مجموعة منتهية فإنه يمكن عد عناصرها . وتسمى المجموعة بالمجموعة المعدودة تعريف: أما إذا كانت A مجموعة غير منتهية فإنه لا يمكن عد عناصرها. ونسميها مجموعات غير معدودة العناصر. تعريف: اما إذا كانت A مجموعة غير منتهية فإنه لا يمكن عد عناصرها، ونسميها مجموعات غير معدودة العناصر.

مثال (1-28). : لتكن $A=\{1,2,3,....,n\}$ فما عدد عناصر المجموعة A

الحل: عدد $A = n$

ملاحظة : إذا كانت $A = \phi$ فان عدد عناصر المجموعة A صفرا

ملاحظة : جميع المجموعات N^*, N هي مجموعات جزئية من R وغير معدودة .

1-1-10-3 : مجموعات الأعداد غير المنتهية او اللانهائية

1) مجموعة الأعداد الطبيعية ويرمز لها بالرمز N^* حيث $N^* = \{1, 2, 3, ...\}$

2) مجموعة الأعداد الطبيعية والصفر ويرمز لها بالرمز N

$N = N^* \cup \{0\}$

3) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ويرمز لها بالرمز Z^+

$Z = \{1,2,3,........\}$

4) مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة ويرمز لها بالرمز Z^-

$Z^- = \{ .....,-3,-2,-1,.....\}$

5) مجموعة الأعداد الصحيحة ويرمز لها بالرمز Z تشمل مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة بالإضافة الى الصفر. أي

$Z = Z^{+} \cup Z^{-} \cup \{0\}$

6) مجموعة الأعداد النسبية الموجبة ويرمز لها بالرمز Q^{+}

$Q^{+} = \{\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, ...\}$

7) مجموعة الأعداد النسبية السالبة ويرمز لها بالرمز-Q

$Q^{-} = \{\frac{-1}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-3}{1}, ... \frac{-3}{2}, ...\}$

8) مجموعة الأعداد النسبة

$Q = \{\frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1} ....\}$

$Q = Q^{+} \cup \{0\} \cup Q^{-}$

9) مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ويرمز لها

$R^{+} = \overline{Q}^{+} \cup Q^{+}$ (حيث $\overline{Q}^{+}$ مجموعة الأعداد غير النسبية الموجبة).

$R^{+} \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, ... \frac{2}{3}, ...\}$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

10) مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة ويرمز لها بالرمز وبالتالي

$R^{-} = \overline{Q}^{-} \cup Q^{-}$

$R^{-} = \{.... \frac{-4}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{1}, \frac{-1}{1} ....\}$

11) مجموعة الأعداد الحقيقية

$R = R^{-} \cup R^{+} \cup \{0\}$

كذلك كل المجموعات الناتجة عن هذه المجموعات كمجموعة الأعداد الفردية الطبيعية والزوجية الطبيعية وكل مجموعة ليس لها حد أدنى او اعلى او غير محدوده.

1-2 مقاييس النزعة المركزية

أن كلمة النزعة المركزية تعني الرغبة في التمركز والتكثف نحو رقم معين وهذا هو محور دراستنا في هذه الوحدة وكل الذي نوده كيفية حساب هذه القيمة لتمثل باقي القيم تمثيلاً سليماً والتي تعتبر مقياساً لباقي القيم وقد وجد باحثو الاحصاء العديد من هذه المقاييس أهمها:
1) الوسط الحسابي 2) الوسيط 3) المنوال 4) الوسط الهندسي 5) الوسط التوافقي 6) الوسط التربيعي.

هذا وسنتناول كل مقياس على إحدى بنوع من التفصيل من حيث الخصائص وطرق إيجاده.

1-2-1 الوسط الحسابي:

تعريف : الوسط الحسابي لمجموعة مشاهدات هو مجموع هذه المشاهدات مقسوماً على عددها ويمكن كتابة هذه العلاقة الرياضية:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المشاهدات}}{\text{عدد المشاهدات}} \quad .... \quad (1 - 1)$$

كيفية أيجاد الوسط الحسابي :

a- إذا كانت لدينا البيانات غير مبوبة. وهذه تكون بصورتين.

1)البيانات غير مبوبة ومفردة(غير متكررة).

تعريف :إذا كان لدينا قيم المشاهدات $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$ فان الوسط الحسابي لهذه المشاهدات $\bar{x}$ هو

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{n} \quad ....(1\text{-}2)$$

إن باستخدام رمز المجموع فأننا نكتب المتوسط الحسابي على الصورة

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad .... \quad \mathbf{(1\text{-}3)}$$

مثال(1-29)

إذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية.

21,13,11,7,5,3 والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات.

الحل : باستخدام العلاقة أعلاه فان:

$$\bar{x} = \frac{21+13+11+7+5+3}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

مثال(1-30)

إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المشاهدات84 وكان مجموع هذه المشاهدات 420 أوجد عدد هذه المشاهدات.

الحل : من العلاقة الوسط الحسابي= $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

$$84 = \frac{420}{n} \Rightarrow n = \frac{420}{84} = 5$$

2)إذا كانت المشاهدات متكررة في جدول تكراري فأننا نجد الوسط الحسابي (الوسط الحسابي الموزون او المرجح)

تعريف :إذا كان لدينا قيم المشاهدات $x_1,x_2,.......x$ وتكراراتها المقابلة على التوالي $f_1,f_2,........f_n$ فان الوسط الحسابي يكون

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots\dots\dots x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots\dots f_n} \quad \dots\dots\dots \quad (1\text{-}4)$$

أو باستخدام صيغة لمجموع

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \quad \dots\dots\dots \quad (1\text{-}5)$$

مثال(1-31):في شعبة إدارة الأعمال أعطى مائة طالب امتحان إحصاء من عشر علامات وكان توزيع الطلاب حسب العلامات التي حصلوا عليها موزعة بالجدول (1-1):

العلامة	10	9	8	7	6	5	4
عدد الطلاب	5	16	21	35	13	8	2

جدول (1 - 1)

المطلوب: أيجاد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات.

الحل : نلجأ لحل مثل هذه المسائل إما بتكوين جدول الحل (2 - 1) وباستخدام العلاقة المعطاة:

التكرار f_i	العلامة x_i	$x_i.f_i$
5	10	50
16	9	144
21	8	168
35	7	245
13	6	78
8	5	40
2	4	8
100		733

ثم نجد $\bar{x} = \frac{733}{100} = 7.33$

أو نجد الوسط الحسابي من العلاقة التالية مباشرة

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} \qquad \text{..............................} \quad \mathbf{(1\text{-}6)}$$

دون استخدام الجدول أعلاه على النحو التالي:

$$\bar{x} = \frac{2\times8+8\times5+13\times6+35\times7+21\times8+16\times9+5\times10}{2+8+13+35+21+16+5}$$

$$= \frac{8+40+78+245+168+144+50}{100} = \frac{733}{100} = 7.33$$

b - إيجاد الوسط الحسابي للبيانات المبوبة:
هناك عدة طرق لأيجاد الوسط الحسابي وسوف نستعرض في كتابنا هذا اهم الطرق المستخدمة.

1)طريقة استخدام التكرارات ومراكز الفئات او طريقة القانون العام: في هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:
- نجد مراكز الفئات سر.
- نجد مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة بالتكرار المقابل لها أي $x_i.f_i$
- نجد مجموع التكرارات أي f_i
- ونستخدم العلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1\text{-}7)$$

مثال(1-32)

أوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات المبوبة بالجدول (1-3) بالطريقة المباشرة.

الفئات	24-20	29-25	34-30	39-35	44-40	المجموع
التكرار	7	13	21	6	3	50

جدول (1-3)

الحل :نشكل الجدول (1-4) والذي يحتوي على جميع الحسابات المطلوبة لهذه الطريقة.

الفئات	f_i التكرار	x_i مراكز الفئات	$x_i.f_i$
24 -20	7	22	154=22×7
29 -25	13	27	351=27×13
34-30	21	32	672 =32×21
39-35	6	37	222=37×6
44-40	3	42	126=42×3
المجموع	50		1525

جدول (1-4)

ومن العلاقة نقسم مجموع حاصل الضرب على مجموع التكرارات.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

فاننا نجد ان $\bar{x} = \frac{1525}{50} = 30.5$

2) ايجاد الوسط الحسابي باستخدام الوسط الفرضي:
لايجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:
- نجد مراكز الفئات x_i
- نأخذ أي مركز فئة كوسط فرضي وغالباً ما يكون مركز الفئة المقابلة للأكثر تكراراً ويرمز له بالرمز (a).
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي ونرمز لها بالرمز d_i

- نجد مجموع حاصل الضرب أي $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$

- نجد الوسط الحسابي من العلاقة.

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \quad \text{..........................} \quad \textbf{(1-8)}$$

مثال(1-33)

: اذا كان لدينا البيانات التالية والمبوبة بالجدول (1-5):

الفئات	30-	40-	50-	60-	70-	المجموع
التكرار $ك_ر$	2	9	21	11	7	50

جدول (1-5)

المطلوب: ايجاد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي.

الحل: نكون الجدول (1-6) والمتضمن الحسابات الواردة في الخطوات:

الفئات	التكرار f_i	مراكز الفئات x_i	$d_i=x_i$-a	$d_i.f_i$
-30	2	35	20- =55-35	40-=20-×2
-40	9	45	10- =55-45	90-=10-×9
-50	21	(55)	0 =55-55	0=0×21
-60	11	65	10=55-65	110=10×11
-70	7	75	20=55-75	140=20×7
المجموع	50			120

جدول (1-6)

وليكن الوسط الفرضي a=55 وباستخدام العلاقة أدناه فان:

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$$= 55 + \frac{120}{50} = 55 + 24 = 57.4$$

3) ايجاد المتوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

ولايجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية.

- نجد مراكز الفئات x_i
- نأخذ وسط فرضي وليكن أ والمقابل للاكثر تكرارا من مراكز الفئات
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي أي d_i
- نجد الانحرافات المختصرة ولتكن $d_i' = \frac{d_i}{l}$
- نجد حاصل ضرب $d'.x.f_i$
- نجد مجموع حاصل ضرب $d_i'.f_i$
- نجد المتوسط الحسابي من العلاقة.

$$= a + \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i' . f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \times l \quad \text{..............................} \quad \mathbf{(1\text{-}9)}$$

مثال(1-34) البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالبا موزعين في الجدول (1-7).

الفئات	54-50	59-55	64-60	69-65	74-70	المجموع
الطلاب	7	13	25	3	2	50

الجدول (1-7)

المطلوب: ايجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل : نكون الجدول (1-8) والمتضمن جميع الحسابات الواردة في الخطوات السابقة.

الفئات	التكرار f_i	مراكز الفئات x_i	الانحرافات عن الوسط الفرضي d_i	الانحرافات المختصرة $d_i^{\backslash}$	$d_i^{\backslash}.f_i$
54-50	7	52	10- = 62 -52	$2- = \frac{10-}{5}$	14-=2-×7
59-55	13	57	5- = 62 -57	$1- = \frac{5-}{5}$	13-=1-×13
64-60	25	62	0 = 62 -62	$0 = \frac{0}{5}$	0=0×25
69-65	3	67	5=62-67	$1 = \frac{5}{5}$	3=1×3
74-70	2	72	10=62 -72	$2 = \frac{10}{5}$	4=2×2
المجموع	50				20-

جدول (1-8)

وليكن الوسط الفرضي a=62

وبتطبيق العلاقة نجد أن

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^{\backslash}.f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \times l$$

$$= 62 - \frac{20}{50} \times 5 = 62 - 2 = 60$$

مثال(35-1) البيانات التالية تمثل الأجر الأسبوعي لمائة عامل مبوبة بالجدول (9-1):

الفئات	-30	-35	-40	-45	-50	المجموع
التكرار	7	17	36	29	11	100

جدول (9-1)

المطلوب ايجاد:

أ) الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة.

ب) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن الوسط الفرضي.

جـ) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل نكون الجدول (10-1) والمتضمن جميع الحسابات المطلوبة في الخطوات السابقة.

الفئات	التكرار f_i	مراكز الفئات x_i	$x_i.f_i$	$d_i=x_i-a$	$d_i.f_i$	$d_i^{\backslash}=d_i\backslash l$	$d_i^{\backslash}.f_i$
-30	7	32.5	227.5	10 -=42.5-32.5	70- =10-×7	$2- = \frac{10-}{5}$	14- =2-×7
-35	17	37.5	637.5	5- =42.5-37.5	85-=5-×17	$1- = \frac{5-}{5}$	17-=1-×17
-40	36	42.5	1530	0=42.5-42.5	0=0×36	$0 = \frac{0}{5}$	0=0×36
-45	29	47.5	1377.5	5=42.5-47.5	145=5×29	$1 = \frac{5}{5}$	29=1×29
-50	11	52.5	577.5	10=42.5-52.5	110=10×11	$2 = \frac{10}{5}$	22=2×11
المجموع	100		4350		100		20

جدول (10-1)

ليكن الوسط الفرضي a=42.5

أ) الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$$\bar{x}=\frac{4350}{100}=43.50$$

ب) الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات عن الوسط الفرضي:

من العلاقة $$\bar{x}=a+\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$$\bar{x}=\frac{100}{100}+42.5=1+42.5=43.5$$

جـ) ايجاد الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي أ .

من العلاقة: $$\bar{x}=a+\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i' . f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}*l$$

$$\bar{x}=42.5+\frac{20}{100}*5=1+42.5=43.5$$

نلاحظ ان الوسط الحسابي في الطرق الثلاث متساوية.

2 - 2 -1) الوسط الحسابي المرجح:

لعل هذا المفهوم يفيد كثيراً في حالات دمج مجموعات ذات أحجام عناصر مختلفة ولابد من التوقف عند هذا المفهوم لنتناول هذا التعريف.

تعريف: اذا كان لدينا مجموعات من المشاهدات معروفة $n_1,n_2,\ldots\ldots,n_m$ وقمنا بعملية دمج مجموعات المشاهدات المختلفة وأردنا ايجاد الوسط الحسابي للمجموعات بعد الدمج فاننا نجد الوسط الحسابي للمجموعات بعد الدمج (الوسط الحسابي المرجح) من العلاقة التالية:

$$\bar{x}=\frac{\bar{x}_1 n_1+\bar{x}_2 n_2+\ldots\ldots\ldots+\bar{x}_n n_m}{n_1+n_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+n_m}$$

مثال(1-36)

اذا كان لدينا ثلاثة عينات احجامها على التوالي $n_1=15,n_2=20,n_3=25$ وكانت اوساطها الحسابية $\overline{x_1}=45$، $\overline{x_2}=75$، $\overline{x_3}=60$ ودمجت المجموعات الثلاث معاً أوجد الوسط الحسابي المرجح للمجموعات بعد الدمج.

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2 + \dots\dots\dots + \bar{x}_n n_m}{n_1 + n_2 + \dots\dots\dots\dots + n_m}$$

الحل:

$$= \frac{60 * 25 * 75 * 20 * 45 * 15}{25 + 20 + 15}$$

$$= \frac{1500 + 1500 + 675}{60} = \frac{3675}{60} = 61.25$$

3 - 2 - 1 خصائص الوسط الحسابي :

1) مجموع انحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي = صفر.

مثال(1-37) اذا كان لدينا قيم المشاهدات 20،27،15،21،17 أثبت أن مجموع انحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي يساوي صفراً.

الحل : نجد الوسط الحسابي $20 = \bar{x} = \frac{17 + 21 + 15 + 27 + 20}{5} = \frac{100}{5}$

نجد الانحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 17 - 20 = -3$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 21 - 20 = 1$$

$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 15 - 20 = -5$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 27 - 20 = 7$$

$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 20 - 20 = 0$$

$$\sum d_i = -3 + 1 - 5 + 7 = 0$$

وهذا ما يؤكد صحة الخاصية بأن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي= صفر.

2) الوسط الحسابي يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال(1-38)

اوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات التالية.2500,40,50,13,37

الحل : $\bar{x} = \frac{2500 + 40 + 50 + 13 + 37}{5} = \frac{2640}{5} = 528$

وهذا العدد بعيد كل البعد عن باقي قيم المشاهدات وهذا من جراء القيمة المتطرفة 2500 لكن لو استبعدنا القيمة المتطرفة فنلاحظ ان الوسط الحسابي سيصبح واقعياً.

مثال(1-39) اوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات اعلاه بدون القيمة المتطرفة.

الحل : $\bar{x} = \frac{40+50+13+37}{4} = \frac{140}{4} = 35$

وهذه القيمة متقاربة مع قيم المشاهدات الاخرى.

3) يأخذ كل قيم المشاهدات في الاعتبار من العلاقة:

وهذا واضح من العلاقة الرياضية التالية:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots\dots\dots + x_n}{n} \qquad (1\text{-}10)$$

مثال(1-40)

اوجد المتوسط الحسابي لعلامات خمسة طلاب في امتحان احصاء كانت كما يلي

9،6،0،8،7

الحل نجد $\bar{x} = \frac{9+6+0+8+7}{5} = \frac{30}{5} = 6$

4) المتوسط الحسابي هو متوسط لقيم المشاهدات في المجموعة وليس متوسط لتراتيب القيم كما هو الحال في الوسيط.

5) مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها أقل من مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي قيمة اخرى.

مثال(1-41) أ) اوجد مربع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي لقيم المشاهدات 5،3، 13،9، 10 ثم اوجد مربع الانحرافات عن القيمة 13.

وقارن بين النتيجة الأولى والثانية لتثبت صحة الخاصية أعلاه.

الحل: نجد: $\bar{x} = \frac{10+13+9+5+3}{5} = \frac{40}{5} = 8$

نجد:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 3 - 8 = -5 \qquad d_1^2 = 25$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 5 - 8 = -3 \qquad d_2^2 = 9$$

$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 9 - 8 = 1 \qquad d_3^2 = 1$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 13 - 8 = 5 \qquad d_4^2 = 25$$

$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 10 - 8 = 2 \qquad d_5^2 = 4$$

$$\sum d_i^2 = 25 + 9 + 1 + 25 + 4 = 64$$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن المشاهدة 13

$d_1 = x_1 - 13 = 3 - 13 = -10 \qquad d_1^2 = 100$

$d_2 = x_2 - 13 = 5 - 13 = -8 \qquad d_2^2 = 64$

$d_3 = x_3 - 13 = 9 - 13 = -4 \qquad d_3^2 = 16$

$d_4 = x_4 - 13 = 13 - 13 = 0 \qquad d_4^2 = 0$

$d_5 = x_5 - 13 = 10 - 13 = -3 \qquad d_5^2 = 9$

$\sum d_i^2 = 150$

نلاحظ أن مجموع الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي اقل من مجموع انحرافات القيم عن أية قيمة أخري لأن $64 < 150$.

5)عند إضافة عدد ثابت ألي جميع قيم المشاهدات فأننا نضيف هذه العدد ألي الوسط الحسابي.

6)عند ضرب عدد ثابت في جميع قيم المشاهدات فأننا نضرب الوسط الحسابي في نفس القيمة.

1-3 مقاييس التشتت..

تعريف: التشتت هو تباعد القيم عن بعضها البعض او عن نقطة معينة. لكن هذا بدوره يحمل بطياته عدة تساؤلات لعدم تجانس البيانات في بعض أوقاته لذا اتفق على ان يكون هناك نقطة ثابتة لقياس التباعد او التقارب عن هذه النقطة ووجد ان الوسط الحسابي خير ممثل لهذه النقطة حيث ان غالبية النقاط تكون قريبة نحو هذه النقطة وقد يكون

- هذا البعد كبيرا أي ان البيانات متبعثرة.
- هذا البعد قليلا أي ان البيانات غير متبعثرة.
- او قد يكون هذا البعد متساوي أي لايوجد تشتت

مقاييس التشتت

لعل أهم مقاييس التشتت نذكر منها ما يلي

1-3-1 المدى: يعتبر المدى من المقاييس التي يسهل حسابهاومنها

أ)المدى للبيانات غير المبوبة : وهو ابسط مقاييس التشتت وهو الفرق بين اكبر قيمة و اصغر قيمة. ويمكن ايجاده من العلاقات التالية:

المدى = اكبر قيمة- اصغر قيمة .... **(1-11)**

ملاحظة: قد تبرز في بعض البيانات بعض القيم المتطرفة كثيرا ً وبما ان المدى يعتمد علىاكبر و اصغر قيمة لذا فانه يتأثر مباشرة ويكون البعد كبيرا. لذا ينصح بحذف القيم المتطرفة الصغرى و الكبرى. عن طريق استخدام مفاهيم عدة منها:

1) المدى المنيني = المنين الاعلى - المنين الادنى

$p_{99}-p_1$= المئيـن التاسـع والتسـعون- المئيـن الاول =

(1-1 [illegible],

2) نصـف المـدى المئينـي= $\frac{\text{المئين التاسع والتسعون - المئين الأول}}{2} = \frac{p_{99}-p_1}{2}$ ...(2-3)

3) المدى العشيري = العشير التاسع - العشير الاول=

$D_9-D_1=P_{90}-P_{10}$ .... (1-12)

4) نصف المدى العشيري= $\frac{\text{العشير التاسع - العشير الأول}}{2}$ ....(1-13)

نصف المدى العشيري = $\frac{P_{90}-P_{10}}{2}$ .... (1-14)

5) المدى الربيعي= الربيع الاعلى - الربيع الادنى

$Q_3-Q_1=P_{75}-P_{25}$ .... (1-15)

6)نصف المدى الربيعي= $\frac{\text{الربيع الأعلى - الربيع الأدنى}}{2}$ .... (1-16)

$= \frac{Q_3-Q_1}{2} = \frac{P_{75}-P_{25}}{2}$

مثال(1-42) لدينا البيانات التالية تمثل د رجات عشرة طلاب من 50 كما يلي:

37, 2 8, 22, 39,41,21,27,34,43,25

والمطلوب ايجاد

1) المدى المطلق 2) نصف المدى الربيعي

الحل : لايجاد المدى المطلق نتبع ما يلي

- ترتب المشاهدات ترتيبا تصاعديا

43	41	39	37	34	28	27	25	22	21
(10)	(9)	(8)	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

1) المدى المطلق = اعلى مشاهدة - اصغر مشاهدة

=43-21=22

2) لايجاد نصف المدى الربيعي.
أ) نجد الربيع الادنى او P_{25} كما يلي :
- نجد ترتيب الربيع الادنى من العلاقة التالية

ترتيب الربيع الادنى = $2.75 = \frac{275}{100} = (1+10)\frac{25}{100}$

- نجد موقع ترتيب الربيع ويقع بين الترتيب الثاني والثالث.
- نجد القيم المناظرة للترتيبين الثاني والثالث وهما 22،25 تكون قيمة الربيع الاول= $23.5 = (25+22)\frac{1}{2}$

2) لايجاد الربيع الاعلى أو P_{75} باتباع الخطوات التالية
- نجد ترتيب الربيع الاعلى من العلاقة.

ترتيب الربيع الاعلى = $8.25 = \frac{825}{100} = (1+10)\frac{75}{100}$

نجد موقع الترتيب من بين التراتيب فيقع بين الترتيب الثامن والتاسع
- نجد القيم المناظرة للترتيبين وهما 39، 41.
- فيكون قيمة الربيع الاعلى هي = $40 = (41+39)\frac{1}{2}$

لإيجاد نصف المدى الربيعي نجدة من $\frac{Q_3-Q_1}{2} = \frac{40-23.5}{2} = \frac{16.5}{2} = 8.25$

ب) ايجاد المدى المطلق من البيانات المبوبة نتبع ما يلي
نجد المدى المطلق من العلاقات التالية .

المدى المطلق = الحد الفعلي للفئة العليا- الحد الادنى للفئة الدنيا ...... (1-17)

المدى المطلق = مركز الفئة العليا - مركز الفئة الدنيا.. .... (1-18)

ولتجنب القيم المتطرفة حتى نحصل على مقياس تشتت له فاعلية نجد احد المقاييس الواردة في البند السابق وذلك حسب وجود القيم المتطرفة في البيانات. وستتركز دراستنا على نوع منها

1-3-2 نصف المدى الربيعي وطرق ايجاده.

نصف المدى الربيعي = $\frac{\text{الربيع الأعلى - الربيع الأدنى}}{2}$ .... (1-19)

مثال(43-1): البيانات التالية تمثل الرواتب الشهرية ل 60 موظفا يعملـون فـي احـد المؤسسات مبوبة كما في الجدول (11-1)

فئات الرواتب	90-99	100-109	110-119	120-129	130-139	140-149	150-159	المجموع
عدد الموظفين	5	9	11	17	11	3	2	60

جدول(11-1)

المطلوب: أ) إيجاد المدى المطلق ب)ايجاد نصف المدى الربيعي

الحل: نكون جدول الحل(12-1)

فئات الرواتب	عدد الموظفين	الحدود الفعلية	الحد الاعلى الفعلي	التكرار المتجمع الصاعد	مركز الفئة x_i
99-90	5	99.5-89.5	99.5>	5	94.5
109-100	9	109.5-99.5	109.5>	14	104.5
119-110	11	119.5-109.5	119.5>	25	114.5
129-120	17	129.5-119.5	129.5>	42	124.5
139-130	11	139.5-129.5	139.5>	53	134.5
149-140	5	149.5-139.5	149.5>	58	144.5
159-150	2	159.5-149.5	159.5>	60	154.5
المجموع	60				

جدول **(12-1)**

المدى المطلق = الحد الاعلى للفئة العليا - الحد الادنى للفئة الدنيا

159.5-89.5

المدى المطلق عن طريق مراكز الفئات

$= 154.5 - 94.5 = 60$

ب- ايجاد نصف المدى الربيعي من العلاقة التالية

$$\text{نصف المدى الربعي} = \frac{\text{الربيع الثالث} - \text{الربيع الأول}}{2}$$

1) نجد الربيع الاول بالخطوات التالية

- نجد ترتيب الربيع الاول و هو

ترتيب الربيع الاول $\frac{60 \times 25}{100} = 15$

نحدد موقع الربيع الاول في عمود التكرار المتجمع الصاعد ونشير اليه بالسهم.

- نحدد الفئة الربيعية وهي الفئة التي تحصر السهم.

وهي : 109.5-119.5

- نجد الحد الادنى = 109.5.

- نجد الربيع الادنى من العلاقة التالية.

الربيع الادنى = $Q_1 = 109.5 + \frac{15 - 14}{25 - 14} \times 10 = 109.5 + \frac{10}{11} = 110.4$

2) نجد الربيع الثالث باتباع التالي

- نجد ترتيب الربيع الثالث كما يلي

$$= 60 \times \frac{75}{100} = 45$$

- نحدد موقع الترتيب على عمود المتجمع الصاعد.

- نشير الى الموقع بسهم .

- نحدد الفئة الربيعية وهي الفئة الواقعة اسفل السهم

وهي : 129.5-139.5

= نجد حدها الادنى =129.5

نجد الربيع الثالث من العلاقة التالية

الربيع الثالث = $Q_3 = 129.5 + \frac{45 - 42}{53 - 42} \times 10$

$$= 129.5 + \frac{30}{11} = 129.5 + 2.73 = 132.23$$

نصف المدى الربيعي= $\frac{132.23 - 110.40}{2} = 10.915$

3-3-1 الانحراف المتوسط:

تعريف: الانحراف المتوسط هو مقياس من مقاييس التشتت يقيس بدقة الانحراف عن الوسط الحسابي ولايجاد الانحراف المتوسط.

أ- للبيانات غير المبوبة

نتبع الخطوات التالية:

- نجد المتوسط الحسابي لقيم المشاهدات

- نجد الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي من العلاقة.

$|di| = |xi - \bar{x}|$:.

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

حيث n عدد المشاهدات

مثال(1-44): اوجد الانحراف المتوسط لقيم المشاهدات التالية

7,13,16,14,10

الحل: لحل مثل هذه المسائل نتبع الخطوات التالية

- نجد المتوسط الحسابي لمجموعة القيم

$$\bar{x} = \frac{7+13+16+14+10}{5} = 12$$

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات

$$|d_1| = |x_1 - \bar{x}| = |12-7| = 5$$

$$|d_2| = |x_2 - \bar{x}| = |13-12| = 1$$

$$|d_3| = |x_3 - \bar{x}| = |16-12| = 4$$

$$|d_4| = |x_4 - \bar{x}| = |14-12| = 2$$

$$|d_5| = |x_5 - \bar{x}| = |10-12| = 2$$

فيكون $M.D = \frac{5+1+4+4+2}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$

مثال(1-45): لدينا قيم المشاهدات التالية

7,13,12,8,10

المطلوب ايجاد الانحراف المتوسط لهذه المشاهدات

الحل:- نجد اولا الوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{7+13+12+8+10}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

- نجد الانحرافات عن الوسط الحسابي ثم القيمة المطلقة والمجموع ونطبق العلاقة الواردة في المثال السابق.

ب- اذا كانت البيانات مبوبة

- نجد المتوسط الحسابي من العلاقة التالية

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi(fi)}{\sum_{i=1}^{n} fi} \quad ..... \quad (1\text{-}20)$$

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات من العلاقة $|di| = |xi - \bar{x}|$
- نجد حاصل ضرب = $|di|.fi$
- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

$$M.D = \frac{\sum_{i=1}^{n} |di|.fi}{\sum_{i=1}^{n} fi} \quad .... \quad (1\text{-}21)$$

مثال(1-46) : البيانات التالية تمثل اوزان مئة طالب مبوبة كما في الجدول (1-13)

فئـــــــات الاوزان	-40	-45	-50	-55	-60	-65	المجموع
عدد الطلاب	7	18	40	20	10	5	100

جدول (1-13)

والمطلوب ايجاد الانحراف المتوسط لهذه الاوزان

الحل: نكون الجدول(1-14) لتالي الذي يشمل جميع البيانات اللازمة للحل.

فئات الاوزان	fi	xi.	xifi	|di|	|di|fi
-40	7	42.5	297.5	11.15	78.05
-45	18	47.5	855	6.15	110.7
-50	40	52.5	2100	1.15	46
-55	20	57.5	1150	3.87	77
-60	10	62.5	625	8.85	88.5
70-65	5	67.5	337.5	13.85	69.25
المجموع	100		5365		469.5

جدول(1-14)

- نجد $\bar{x}$ من العلاقة :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi(fi)}{\sum_{i=1}^{n} fi} =$$

$$\frac{5365}{100} = 53.65$$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |di|.fi}{\sum_{i=1}^{n} fi} =$$

$$\frac{469.5}{100} = 4.695$$

مثال(1-47): اوجد الانحراف المتوسط لقيم المشاهدات التالية والمبوبة بالجدول (1-15)

فئـــــات الأجور	-40	-50	-60	-70	90-80	المجموع
التكرار	10	20	50	5	15	100

جدول (1-15)

الحل: نكون جدول الحل(1-16)

فئـــــات الاجور	التكرار f	xi	xi fi	$\|di\|$	$\|di\|.fi$
-40	10	45	450	19.5	195
-50	20	55	1100	9.5	190
-60	50	65	3250	.5	25.
-70	5	75	375	10.5	52.5
90-80	15	85	1275	20 .5	307 .5
	100		6450		770

جدول (1-16)

نبدأ بايجاد الوسط الحسابي $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{6450}{100} = 64.5$$

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 45 - 64.5 = -19.5, |d_1| = 19.5$$
$$d_2 = 55 - 64.0 = -9.5, |d_2| = 9.5$$
$$d_3 = 65 - 64.5 = 0.5, |d_3| = 0.5$$
$$d_4 = 75 - 64.5 = 10.5, |d_4| = 10.5$$
$$d_5 = 85 - 64.5 = 20.5, |d_5| = 20.5$$

$$M.D = \frac{\sum_{i=1}^{n} |di|.fi}{\sum_{i=1}^{n} fi} = \frac{770}{100} = 7.7$$

1-3-4مفهوم التباين والانحراف المعياري:

تعريف: **التبـاين:** هـو مجمـوع مربعـات الانحرافـات لقيم المشـاهدات عـن وسطها الحسابي مقسوما على حجم العينة للتباين.

تعريف: **الانحراف المعياري:**هو الجذر التربيعي للتباين.

ولايجاد التباين والانحراف المعياري.

أ- **اذا كانت البيانات غير مبوبة:**

نتبع الخطوات التالية.

- نجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات من العلاقة.

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n}$$

- نجد انحرافات القيم عن الوسط الحسابي أي ومربعاتها.

$$d_1 = x_1 - \bar{x}, d_1^2 = (x_1 - \bar{x})^2$$
$$d_2 = x_2 - \bar{x}, dn^2 = (x_1 - \bar{x})^2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$dn = xn - \bar{x}, dn^2 = (xn - \bar{x})$$

- نجد التباين من العلاقة التالية.

$$S^2 = \frac{\sum_{1=1}^{n} di^2}{n} \qquad \ldots\ldots (1\text{-}22)$$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة التالية.

أذا كان حجم العينة صغيرا

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{1=1}^{n} di^2}{n}}$$

اما اذا كان حجم العينة كبيرا ويقترب من حجم المجتمع فان

$$\sigma^2 = \frac{\sum di^2}{n} \qquad \ldots\ldots (1\text{-}23)$$

.اذا كان حجم العينة مساويا لحجم المجتمع الصغير.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{1=1}^{n} di^2}{n}} \qquad \ldots\ldots (1\text{-}24)$$

والمقصود بحجم العينة او المجتمع صغيرا اذا كانت $n < 30$ ويكون كبيرا اذا كانت $n \geq 30$.

مثال(1-48) : اوجد التباين والانحراف المعياري لقيم المشاهدات التالية:

3,7,11,14,5

الحل: لايجاد التباين والانحراف المعياري نتبع الخطوات التالية.

نجد $\bar{x}=\frac{3+7+11+14+5}{5}=\frac{40}{5}=8$

- نجد الانحرافات ومربعاتها عن المتوسط الحسابي

$$d_1=x_1-\bar{x}=3-8=-5, d_1^2=25$$
$$d_2=x_2-\bar{x}=7-8=-1, d_2^2=1$$
$$d_3=x_3-\bar{x}=11-8=3, d_3^2=9$$
$$d_4=x_4-\bar{x}=14-8=6, d_4^2=36$$
$$d_5=x_5-\bar{x}=5-8=-3, d_5^2=9$$

نجد التباين من العلاقة.

$$S_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} di^2}{n}=\frac{25+1+9+36+9}{5}=\frac{80}{5}=16$$

ولايجاد قيمة الانحراف المعياري فيكون: $Sx=\sqrt{16}=4$

ب) اذا كانت البيانات المعطاة مبوبة:

هناك عدة طرق لايجاد التباين والانحراف المعياري نذكر اهمها:

1) الطريقة المطولة(طريقة القانون العام)

وفي هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات للبيانات المبوبة.

- نجد الوسط الحسابي لهذه البيانات من العلاقة

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} xi(fi)}{\sum_{i=1}^{n} fi}$$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي ومربعاتها على النحو التالي:

$$d_1 = x_1 - \bar{x}, d_1^2 = (x_1 - \bar{x})^2$$
$$d_2 = x_2 - \bar{x}, d_2^2 = (x_2 - \bar{x})^2$$

. . . . . .
. . . . . .

$$dn = xn - \bar{x}, d_n^2 = (xn - \bar{x})^2$$

- نجد مربعات الانحرافات

- نجد حاصل ضرب كل انحراف بالتكرار المقابل له أي نجد
$d_1^2.f_1, d_2^2.f_2, ..., d_n^2.fn$

- نجد التباين من العلاقة

$$S_x^2 = \frac{d_1^2.f_1 + d_2^2.f_2 + ... + d_n^2 \ .f_n}{d_1 + d_2 + ... + d_n}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} di^2 fi}{\sum_{i=1}^{n} fi} \qquad .... (1\text{-}25)$$

نجد الانحراف المعياري من العلاقة:

$$Sx = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} difi}{\sum_{i=1}^{n} fi}} \qquad .... (1\text{-}26)$$

مثال(1-49): الجدول التالي يمثل رواتب مئة موظف في احدى الشركات مبوبة كما في الجدول (1-17)

فئات الرواتب	79-70	89-80	99-90	109-100	119-110	129-120	139-130	المجموع
عدد الموظفين	5	7	21	33	18	13	3	100

جدول (1-17)

والمطلوب ايجاد الانحراف المعياري لهذه المشاهدات

الحل: نكون الجدول(1-18) والمحتوي على كافة البيانات اللازمة للحل

$d_i^2 fi$	d_i^2	$Di= xi-\bar{x}$	xifi	مركز الفئات xi	التكرار fi	فئات الرواتب
4590.45	918.19	30.3	372.5	74.5	5	79-70
2890.3	412.09	20.3	591.5	84.5	7	89-80
2227.89	106.09	10.3	1984.5	94.5	21	99-90
0002.97	00.9	0.3-	3448.5	104.5	33	109-100
1693.63	94.09	9.7	2061.0	114.5	18	119-110
5045.17	388.09	19.7	1618.5	124.5	13	129-120
2646.27	882.09	29.7	403.5	134.5	3	139-130
19096.67			10480		100	

جدول (18-1)

نجد المتوسط الحسابي: $\bar{x} = \frac{10480}{100} = 104.8$

نجد التباين من العلاقة

$$S_x^2 = \frac{\sum_{1=i}^{n} di^2 fi}{\sum_{1=i}^{n} fi} = \frac{19096.67}{100-1} = \frac{19096.67}{99} = 192.9$$

$$S = \sqrt{s^2} = \sqrt{192.9} = 13.89$$

2- ايجاد الانحراف المعياري بأستخدام الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.

لايجاد الانحراف المعياري: بأستخدام الانحرافات عن الوسط الفرضي نتبع الخطوات التالية

- نجد مراكز الفئات xi.

- نأخذ احد مراكز الفئات الموجودة سابقاً كوسط فرضي وليكن a وغالبا ما يكون مركز الفئة المقابل للاكثر تكرارا[1] .

- نجد الانحراف عن الوسط الفرضي من العلاقة di =xi-a

حاصل ضرب كل انحراف في التكرار المقابل له ثم المجموع أي:

- نجد $\sum_{i=1}^{n} di(fi)$

نجد مربع الانحرافات أي: d_i^2

. نجد مجموع حاصل ضرب أي : $\sum_{i=1}^{n} d_i^2 . fi$

نجد التباين من العلاقة

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 fi}{\sum_{i=1}^{n} fi} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} difi}{\sum_{i=1}^{n} fi} \right)^2$$

نجد الانحراف المعياري من العلاقة.

$$Sx = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 fi}{\sum_{i=1}^{n} fi} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} difi}{\sum_{i=1}^{n} fi} \right)^2}$$

تكرارات اقل من او يساوي 30 مفردة يكون الانحراف المعياري اكثر دقة.

3) ايجاد الانحراف المعياري بأستخدام الانحرافات البسيطة المختصرة عن الوسط الفرضي.

لايجاد الانحراف المعياري نتبع الخطوات التالية.

- نجد مراكز الفئات xi .

- نجد الوسط الفرضي a وهو أحد مراكز الفئات.

- نجد الانحرافات عن الوسط الفرضي من العلاقة di=xi-a

- نجد الانحرافات المختصرة من العلاقة .... (1-27)

$$d'i = \frac{di}{l}$$

- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات المختصرة× التكرارات أي

$$\sum_{i=1}^{n} d'ifi$$

- نربع الانحرافات المختصرة ثم نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات

$$\sum d^{2}'ifi$$

المختصرة× التكرارات أي

نجد التباين من العلاقةالتالية

$$S_x^2 = l^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i'^2 fi}{\sum_{i=1}^{n} fi} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} difi}{\sum_{i=1}^{n} fi} \right)^2 \right]$$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة التالية:

$$S_x = l \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d'^2 fi}{\sum_{i=1}^{n} fi} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} d'i.fi}{\sum_{i=1}^{n} fi} \right)^2}$$

مثال(1-50) : البيانات التالية تمثل علامات 100 طالب من 50 موزعة بالجدول (1-19).

فئات الدرجات	صفر-	-10	-20	-30	-40	المجموع
عدد الطلاب	2	5	27	47	19	100

جدول (1-19)

المطلوب ايجاد

1) الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.
2) الانحراف المعياري عن طريق الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي.

الحل: نكون جدول ا لحل (1-20)

فئات العلامات	التكرار f_i	x_i	di	d_i^2	difi	$d_i^2 fi$	$d'i$	$d'ifi$	d'^2	$d'^2 fi$
صفر-	2	5	-20	400	40-	800	2-	4-	4	8
-10	5	15	10-	100	50-	500	1-	5-	1	5
-20	27	25	∴	∴	∴	∴	∴	∴	∴	∴
-30	47	35	10	100	470	4700	1	47	1	47
-40	19	45	20	400	380	7600	2	38	4	76
المجموع	100				760	13600		76		136

جدول (1-20)

1- نبدأ بحل المطلوب الاول.

- نحدد الوسط الفرضي وليكن a=25 أحد مراكز الفئات.
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي.
- نجد مربع الانحرافات عن الوسط الفرضي.
- نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات في التكرارات = 13600
- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات في التكرارات= 760

نجد التباين كما يلي

$$S^2 = \frac{13600}{99} - \left(\frac{760}{99}\right)^2$$

$$= 137.37 - 58.9 = 78.47$$

ثم نجد الانحراف المعياري $S\sqrt{78.47} = 8.86$

2) الحل بطريقة الانحرافات المختصرة.

- نتبع نفس الخطوات السابقة حتى ايجاد الانحرافات di.
- نجد الانحرافات المختصرة من العلاقة.

$$d'i = \frac{di}{l}$$

- نجد مربع الانحرافات المختصرة

$$d'i^2$$

- نجد حاصل ضرب كل انحراف مختصر في التكرار المقابل له ثم المجموع

يعني $\sum_{i=1}^{n} d'i.fi = 7$

- نجد مجموع حاصل ضرب كل مربع انحراف مختصر في التكرار المقابل له

أي $\sum_{i=1}^{n} d_i'^2.fi = 136$

نجد التباين من العلاقة

$$S^2 = \left(\frac{136}{99} - \left(\frac{76}{99}\right)^2\right)100$$
$$= (1.37 - 0.59)100 = (0.78)100$$
$$= 78$$

- نجد الانحراف المعياري.

$$S = \sqrt{78} = 8.83$$

نلاحظ ان النتيجتين متشابهتين بالقيمة

1-3-5 أثر التحويلات الخطية على التباين والانحراف المعياري.

نظرية(1-2): اذا اخضع الانحراف المعياري S^2، التباين S للتحويل الخطي f(x)=ax+b فان الانحراف المعياري والتباين يتأثران بهذا التحويل ويصبح كل منهما كما في العلاقتين.

$$S_y = |a| S_x \quad \text{(1-28)}$$

حيث Sy قيمة الانحراف المعياري بعد التأثير.

$$S^2_y = a^2.S^2_x \quad \text{(1-29)}$$

حيث S^2_y: قيمة التباين بعد التأثر

مثال(1-51): اذا كان الانحراف المعياري لقيم المشاهدات =4 وتباينها 16 خضعت لتحويل خطي حسب المعادلة.

$$y = 0.3x + 7$$

المطلوب: حساب الانحراف المعياري والتباين بعد التعديل

الحل: نجد الانحراف المعياري من العلاقة

$$S_y = |a|.S_x = 0.23(4) + 7$$
$$= 1.2 + 7 = 8.2$$

التباين بعد التعديل حسب العلاقة التالية

$$S_y^2 = (0.7)^2 \times 16$$
$$= 16 \times 0.49$$
$$= 7.84$$

1-3-6 العلامة المعيارية وكيفية ايجادها.

تعريف(5 -2): ان الدرجة المعيارية لقيمة مشاهدة x_i لعينة ماهي

$$Z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x} \qquad \textbf{(1-30)}$$

حيث Z_i هي الدرجة المعيارية للمشاهدة X_i.

اما اذا كانت المشاهدة مأخوذة من مجتمع فان الدرجة المعيارية للمشاهدة x_i يمكن ايجادها من العلاقة.

$$Zi = \frac{Xi - \mu}{\sigma x} \qquad \textbf{(1-31)}$$

حيث : μ الوسط الحسابي للمجتمع σ_x: الانحراف المعياري للمجتمع.

مثال(1-52): اذا كانت درجة احمد في امتحان مادة الاحصاء 75 وكان معدل علامات الصف 60 وكان تباين الدرجات 36 أوجد الدرجة المعيارية لدرجة أحمد.

الحل: نجد العلامة المعيارية من العلاقة:

$$Z_{75} = \frac{75-60}{\sqrt{36}} = \frac{15}{6} = 2.5$$

أي ان الدرجة المعيارية = 2.5.

مثال(1-53): لدينا قيم المشاهدات التالية 3، 8، 9، 5، 10 أوجد القيم المعيارية لهذه المشاهدات.

الحل: - نجد $\bar{x} = \frac{3+8+9+10}{5} = \frac{35}{5} = 7$

نجد $S_x^2 = \frac{(3-7)^2 + (8-7)^2 + (9-7)^2 + (5-7)^2 + (10-7)^2}{5}$

$$= \frac{16+1+4+4+9}{5} = \frac{34}{5}$$

وعليه فأن $Sx = \sqrt{6.8} = 2.61$

$$Z_1 = \frac{3-7}{2.61} = \frac{-4}{2.61} = -1.5$$

$$Z_2 = \frac{8-7}{2061} = \frac{1}{2061} = 0.4$$

$$Z_3 = \frac{9-7}{2.61} = \frac{2}{2.61} = 0.8$$

$$Z_4 = \frac{5-7}{2.61} = \frac{-2}{2.61} = -0.8$$

$$Z_5 = \frac{10-7}{2.61} = \frac{3}{2.61} = 1.2$$

ولو اخذنا الدرجة المعيارية الاولى وفسرنا الرقم-1.5 هذا يعني ان قيمة المشاهدة الاولى تنحرف عن وسطها بدرجة ونصف الى اليسار

مثال(1-54): لدينا قيم المشاهدات التالية 2،6،12،16،9 أوجد الانحراف المعياري والتباين لهذه المشاهدات.

الحل : نجد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات.

$$\bar{x} = \frac{2+6+12+169}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

$$S^2 = \frac{(2-9)^2 + (6-9)^2 + (12-9)^2 + (16-9)^2 + (9-9)^2}{5}$$

$$= \frac{49+9+9+49+0}{5} = \frac{116}{5} = 23.2$$

$$S = \sqrt{23.2} = 4.82$$

هناك طـرق اخـرى لايجـاد التبـاين و الانحـراف المعيـاري لقيـم المشـاهدات غـير المبوبة على النحو:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 \text{......(1-32)}$$

اما الانحراف المعياري فيمكن ايجاده على النحو:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

مثال(55-1): اوجد التباين و الانحراف المعياري لقيم المشاهدات التالية:

8,12,10,5,15

الحل: نكون جدول الحل (21-1)

x	x^2
8	64
12	144
10	100
5	25
15	225
50	558

جدول (21-1)

$$S^2 = \frac{558}{5} - \left(\frac{50}{5}\right)^2 = 111.6 - 100 = 11.6$$

$$S = \sqrt{11.6} = 3.4$$

مثال(1-56): البيانات التالية تمثل الاجر الاسبوعي لمائة عامل مبينة كما في الجدول (1-22)

فئات الاجرة	20-	40-	60-	80-	100-120
عدد العمال	8	50	45	20	15

جدول (1-22)

والمطلوب : ايجاد التباين والانحراف المعياري بطرقه المختلفة

الحل: نكون جدول الحل (1-23)

D^2ifi	D^2i	difi	di	X^2ifi	X^2i	$(xi-\bar{x})^2fi$	$(xi-\bar{x})^2$	$xi-\bar{x}$	xifi	fi	xi	الفئات
12800	1600	320-	-40	7200	900	1577	.1971	-44.4	240	8	30	-20
4800	400	240	-20	30000	5200	.7144	595.3	-24.4	650	12	50	-40
∴	∴	∴	∴	320500	4900	871.2	19.36	-4.4	3150	45	70	-60
8000	400	400	20	162000	8100	4862	243.6	15.6	1800	20	90	-80
24000	1600	600	40	181500	12100	1901	127.6	35.6	1650	15	110	-100 120
29600		440		601200		4766			440	100		

جدول (1-23)

بالاستفادة من الجدول اعلاه فأن

نجد اولا: الوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{7440}{100} = 74.4$$

ثم نجد التباين من العلاقة

$$S^2 = \frac{47664}{100} = 476.64$$

اما الانحراف المعياري

$$S = \sqrt{476.64} = 21.83$$

طريقة ثانية:

$$S^2 = \frac{601200}{100} - \left(\frac{7440}{100}\right)^2 = 6012 - 5535.36 = 476.64$$

أما الانحراف المعياري يمكن ايجاده على النحو

$$S = \sqrt{467.64} = 21.84$$

1-3-7 التباين التجميعي:(Poaled Variance)و الانحراف المعياري.

لو أخذنا من مجتمعات عددها (n) عينات ذوات احجام $(n_1,n_2,\ldots,n_n)$ ومن هذه العينات حسبنا اوساطها الحسابية وتبايناتها $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n,S_1^2,S_2^2,\ldots,S_n^2)$ فان متوسط متوسطات العينات المرجحة بحجم العينة هو:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} \qquad \ldots\ldots(1\text{-}33)$$

أو

$$\mu = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \ldots\ldots + n_n\bar{x}_n}{n_1 + n_2 + \ldots + n_n} \qquad \ldots\ldots(1\text{-}34)$$

$$S_T^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (n_i - 1)S_i^2 + n_i(\bar{x}_i - \mu)^2}{\sum_{i=1}^{n} (n_i - 1)}$$

$$\sigma_T^2 = \frac{\sum (n_i - 1)S_i^2 + n_i(\bar{x}_i - \mu)^2}{\sum_{i=1}^{n} (n_i - k)}$$

مثال(1-57) :اذا كانت لدينا العينات التالية كما في جدول (1-24)-

جدول

	1	Π	1Π
n	100	300	200
$\bar{x}$	65	55	60
σ^2	49	81	64

(1-24)

والمطلوب ايجاد: 1) ايجاد الوسط الحسابي لاوسا ط العينات

2) التباين والانحراف المعياري التجميعي.

الحل: بتطبيق العلاقة:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{65 + 100 + 55 \times 300 + 60 \times 200}{100 + 300 + 200}$$

$$\frac{35000}{600} = 58.3$$

$$\sigma_T^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (n_i - 1)S_i^2 + n_i(\bar{x}_i - \mu)}{\sum_{i=1}^{n} (n_i - k)}$$

$$= \frac{49(99) + 81(299)9 + 64(199) + 4444.4 + 3333.3 + 6422.2}{600 - 3}$$

$$= \frac{56006}{597} = 93.81$$

عدد درجات الحرية= عدد القيم المستقلة= n-1 ....(1-34)

1-3-8 المقارنة بين تشتت توزيعين او اكثر:

ويستخدم لهذه العملية عدة مقاييس منها:

1 - مقاييس التشتت النسبي:

وهو موضوع يعالج مسألة المقارنة بين تشتت توزيعين أو أكثر، فعند دراسة توزيعين او اكثر فاننا نواجه مشاكل منها:

1- الاختلاف في وحدات القياس.

2- الاختلاف في المتوسطات.

ولهذا عرف مقياس التشتت النسبي ، بأنه :

$$\text{مقياس التشتت النسبي} = \frac{\text{مقياس التشتت المطلق}}{\text{مقياس التوسط}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1\text{-}35)$$

ومن هذه المقايس

1- نصف المدى الربيعي

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

ويوانم هذا المقياس الوسيط $\frac{1}{2}(\frac{Q_3 - Q_1}{2})$ لمقياس توسط.

$$\text{وعليه فان : مقياس التشتت النسبي} = \frac{\text{مقياس التشتت المطلق}}{\text{مقياس التوسط}} \quad \ldots\ldots\ldots(1\text{-}36)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{\frac{1}{2}(Q_3 + Q_1)}$$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

واذا اخذ شكل النسبة المئوية فانه يعرف بمعامل الاختلاف:-

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{Q_3 - Q}{Q_3 + Q_1} \times \%100$$

2-باستخدام الانحراف المعياري والمتوسط الحسابي:

ويوانمه الوسط الحسابي لمقياس توسط.

وعليه :

مقياس التشتت النسبي= $\frac{S}{\bar{x}}$ .... (1-37)

و اذا اخذ شكل النسبة المئوية فانه يعرف بمعامل الاختلاف

معامل الاختلاف= $\frac{S}{\bar{x}} \times \%100$ .... (1-38)

1-3-9 أهمية تطبيق معامل الاختلاف:

الاختلاف نفي لمفهوم التجانس، ويوظف هذا المفهوم للدلالة على النوعية والجودة، وخاصة ضبط النوعية ومراقبة الجودة.

مثال(1-58) اذا كان لدينا البيانات في جدول (1-25) عن سلعتين فايهما أجود؟

البيان	السلعة I	السلعة II
وزن الوحدة	60 غم	60غم
سعر الوحدة	340	340
n	50	50
x	52	48
S	8	7
معامل الاختلاف	$\frac{8}{52} \times 100\% = 15.385\%$	$\frac{7}{48} \times 100\% = 14.583\%$

جدول (1-25)

فمن الجدول يتبين ان السلعة II اجود من السلعة I . لأن معامل اختلافها أقل معامل اختلاف السلعة الأولى.

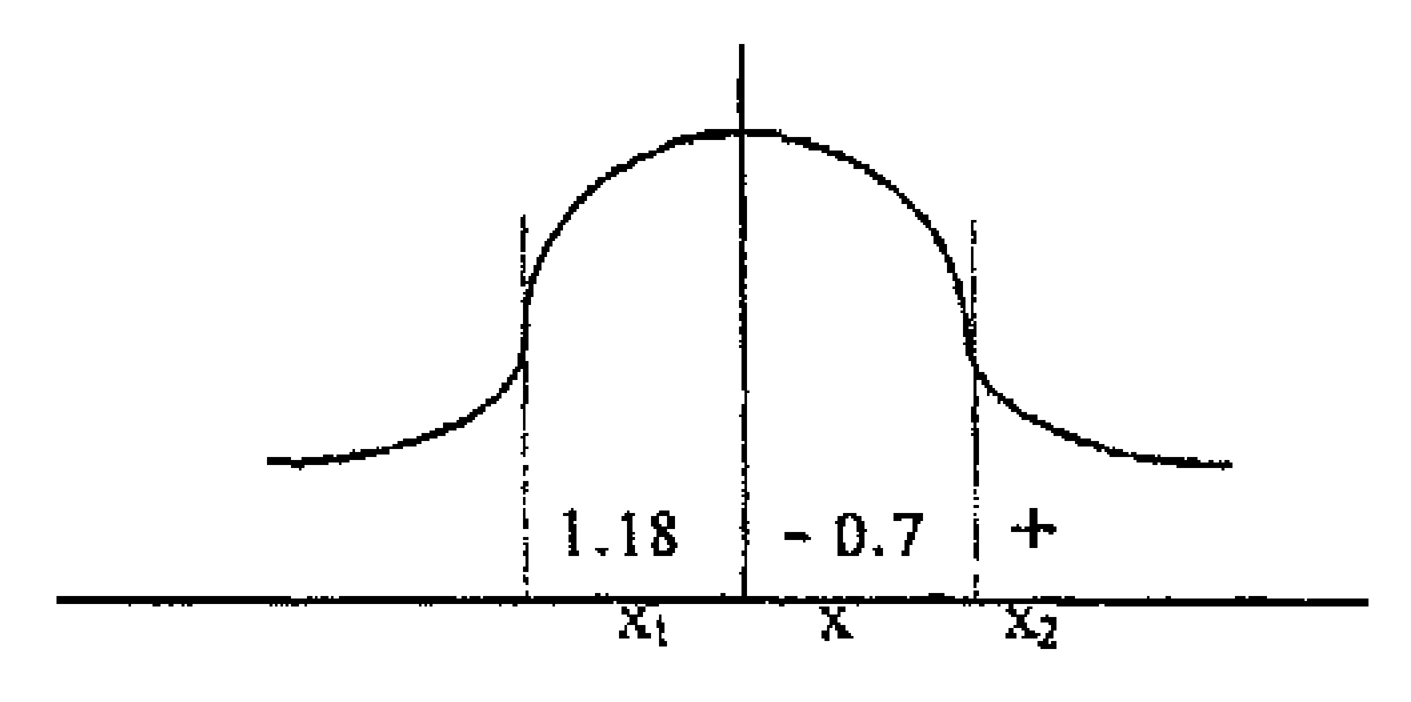
* ملاحظة : كلما قل معامل الاختلاف زادت جودة السلعة.

1-3-10 التعيير: (Standarization)

هو وضع القيم ضمن معيار موحد، واحصائيا هو عبارة عن التعبير عن قيم المتغير (x) الذي له التوزيع التكراري (x)، المتوسط $\bar{x}$ والانحراف المعياري S، بعدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها تلك القيم عن وسطها الحسابي.

فلأي قيمة مثل x_i فان:

$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{S} \quad \ldots\ldots \quad (1\text{-}39)$$



شكل(1-1)

ففي الشكل: (1-1)

- القيمة (+0.7) تعني ان القيمة x_2 تنحرف (0.7) انحرافاً معيارياً عن x من الجهة اليمنى .

- القيمة (-1.18) تعني أن القيمة x_1 تنحرف (1.18) انحرافاً معيارياً عن $\bar{x}$ من الجهة اليسرى.

مثال(1-59) : ضمن المعطيات في جدول(1-26) أيهما مستواه أعلى تحصيليا

البيان	أحمد	محمود
x_i	72	82
$\bar{x}$	60	80
S	80	10
Z_x	1.5	0.2

جدول (1-26)

أحمد مستواه أعلى لأن القيمة المعيارية له أكبر.

* **ملحوظة:** كلما زادت القيمة المعيارية زاد المستوى، ومنه فإن المستوى يتناسب تناسبا طرديا مع القيمة المعيارية.

مميزات القيمة المعيارية:

1) للمتغير (x) الذي له التوزيع التكراري $d(x_i)$، فإن القيمة المعيارية (Z_x) لها توزيع تكراري كمتوسط حسابي= 0، وتباين = 1

$$\overline{Z} = 0, \sigma_z^2 = 1$$

مثال(16-2): جد (S_z^2) و $(\bar{z})$ للبيانات التالية المبينة بالجدول(1-27)

Z^2	Z	$(x_i - \bar{x})^2$	x_i
2	1.14-	16	2
0.5	1.41-	4	4
0	0	0	6
0.5	0.7+	4	8
2	1.14+	16	10
5	صفر	40	30

جدول(1-27)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (xi - \bar{x})^2}{n} = \frac{40}{5} = 8 \quad 5$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Zi^2}{n} = O$$

$$Sz^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Zi^2}{n} = \frac{5}{5} = 1$$

مثال(2-17): اذا كان الوسط الحسابي لقيم مشاهدات 50 وانحرافها المعياري 4 وكانت مجموعة اخرى من قيم مشاهدات مبوبة كما في الجدول .(28-1)

فيما يلي بيان بعدد ساعات الاستعداد الاسبوعي المبوبة حسب مشاهدات العينة العشوائية الحجم 50 من الطلبة.

فئــــــــات الاستعداد	عـــــــــدد الطلبة	x_i	x_if_i	فئـات اقـل من	التكــــــرار التجميعي
-0	8	1	8	2 >	8
-2	12	3	36	4>	20
-4	15	5	75	6>	35
-6	10	7	70	8>	45
10-8	5	8	45	10>	50
	50		234		

جدول(28-1)

المطلوب : ايجاد

1)ايجاد الوسط الحسابي لهذه البينات.

2)ايجاد الانحراف المتوسط.

3)ايجاد الانحراف المعياري.

4)ايجاد معامل الاختلاف.

5)ايجاد معامل الالتواء بطريقة بيرسون.

6)ايجاد معامل الالتواء بناءعلى مقارنة المساحة بين الربيعان.

الحل: 1) نجد السط الحسابي من العلاقة التالية

الوسط الحسابي:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{234}{50} = 4.68$$

2) نجد الانحراف المتوسط من العلاقة التالية:

الانحراف المتوسط= $$M.D = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$$= \frac{8|1-5|+12|3-5|+15|5-5|+10|7-5|+5|9-5|}{50} = \frac{32+25+0+20+20}{50}$$

$$= \frac{96}{50} = 1.92$$

3) الانحراف المعياري=

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

$$= \sqrt{\frac{8(1-5)^2 + 12(3-5)^2 + 5(5-5)^2 + 10(7-5)^2 + 5(9-5)^2}{50}}$$

$$= \sqrt{\frac{128+48+0+40+80}{50}}$$

$$= \sqrt{\frac{296}{50}} = \sqrt{5092} = 2.433$$

4)نجد معامل الاختلاف Variation cofficentمن العلاقة التالية

$$V.C = \frac{Sx}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{2.433}{4.68} \times 100\% = 52\%$$

5) نجد معامل الالتواء بطريقة بيرسون من العلاقة التالية

$$\alpha_1 = \frac{\bar{x} - \mu}{S_x} = \frac{5-4.75}{2.433} = 0.102$$

الفصل الثاني
التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

الفصل الثاني
التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

2-1 التباديل : Permutation

إن الإنسان على مر العصور وهو يبحث عن عدد الطرق التي يمكن أن يرتب بها مجموعة من الأشياء . كما هو الحال في كيفية جلوس خمسة عشر شخصا على مقعد معين أو وضع عشرين كرة مرقمة في عشرين مكان معين ، أو إذا أراد شخصا السفر من مدينة إلى أخري عبر مدينة ثالثة وكان بين كل مدينة وأخري طرق مختلفة أراد أن يسافر بأحد هذه الطرق والى آخره من مثل هذه الضواهر وبشكل عام إذا أردنا ترتيب n من الأشياء في صف فبكم طريقة يمكن عمل ذلك وهذا هوة ما نبحث ونريد إيجاد علاقة عامة لمثل هذه الأسئلة وما شابهها ، وسوف نستعين بمخطط الشجرة للوصول إلى مثل هذه الإجابات وسنتناول المثال التالي

مثال(1-2) : إذا رمزنا لثلاثة كتب بالأحرف A,B,C وأردنا ترتيب هذه الكتب على رف معين فبكم طريقة يمكن عمل ذلك

الحل : في هذا الحل نستعين بالتمثيل شكل (1-2)على النحو التالي

A	B	C	ABC
	C	B	ACB
B	A	C	BAC
	C	A	BCA
C	A	B	CAB
	B	A	CBA

شكل (1-2) التمثيل بالشجرة

نلاحظ إن عدد الطرق التي من خلالها يمكن ترتيب ثلاثة كتب على الرف هي ستة طرق وهناك طريقة أخرى للذلك .

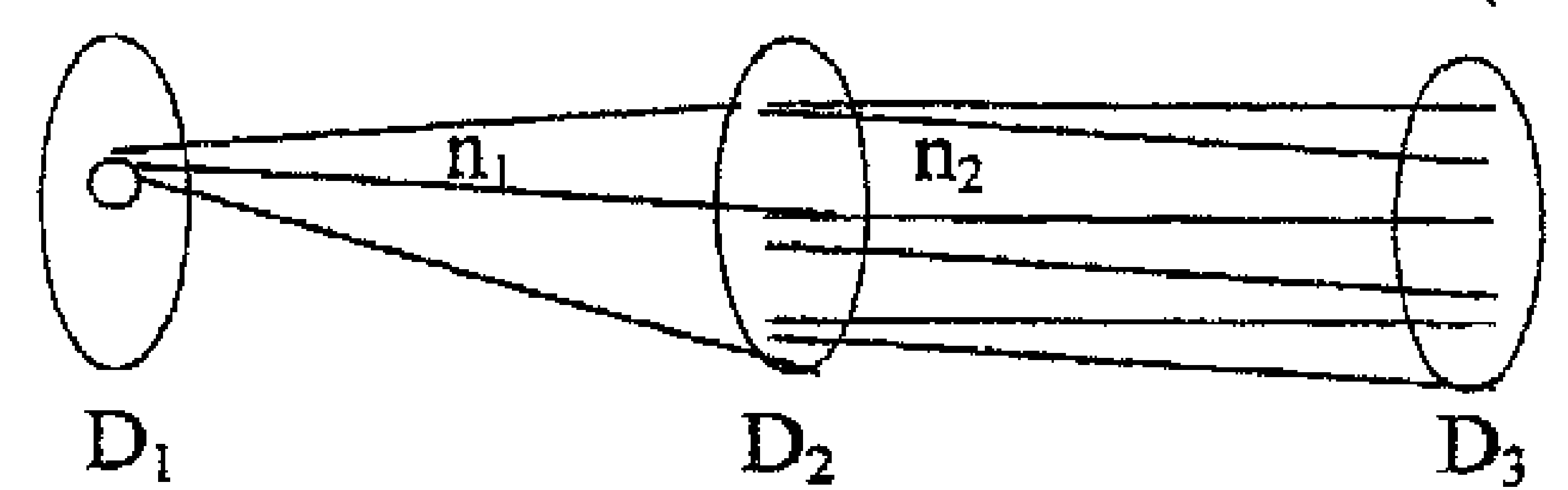
حل آخر : أمامنا ثلاثة عيون وهي التي تمثل مواقع الكتب ونريد ملئها فالكتاب الأول يمكن وضعه بثلاثة طرق ،الكتاب الثاني يمكن ترتيبه بطريقتين الكتاب الثالث يكون أمامه طريقة واحدة

3		

3	2	

3	2	1

2-2: مبدأ الضرب (قاعدة الضرب): ليكن لدينا ثلاثة مواقع كما هو موضح في شكل (2-2)



شكل (2-2)

فأذ فكرنا انه يمكننا ترتيب ظاهرة معينة ب n_1 طريقة وكان عدد طرق ترتيب ظاهرة آخر هو n_2 طريقة فان عدد طرق الترتيب الناتجة $n_1.n_2$ وإذا كان لدينا k ظاهرة فان عدد التراتيب تصبح عدد التراتيب.

$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$

مثال(2-2): كم عدد ثلاثي يمكن تكوينه من الأرقام 1,2,3,4,5, بحيث لا يتكرر ظهور الرقم في أي من هذه الأعداد

الحل: بما أن العدد مكون من ثلاثة أرقام فان الأماكن التي يراد ملئوها هي ثلاثة أماكن . المكان الأول يمكن ملؤه بخمسة طرق والمكان الثاني بأربعة طرق بينما المكان الثالث يمكن ملؤه بثلاثة طرق ليصبح عدد الأعداد التي يمكن تكوينها 5.4.3=60

2-3قاعدة الجمع:
إذا كان لدينا عمليات أحدهما تتم ب n_1 طريقة والعملية الأخرى تتم ب n_2 طريقة أردنا إنجاز إحدى العمليتين فبكم طريقة يمكن أن يتم الإنجاز .هذا ما نريد الإجابة عليه فحسب قاعدة الجمع فان عدد الطرق هو n_1+n_2 وبشكل عام فان
عدد الطرق =

$$n_1 + n_2 + \dots\dots\dots\dots n_k$$

مثال(2-3): يريد عشرة أشخاص تنظيم رحلة سياحية إما من خلال قطار أو من خلال الباصات فإذا كان لدينا ثلاث قطارات وباصين فبكم طريقة يمكن تنظيم هذه الرحلة بحيث أن يستعملو القطار أو الباص

الحل: حسب قاعدة الجمع فان عدد الطرق =3+2=5

2-4مضروب n .
تعريف(2-1) : يقال لحاصل ضرب الاعداد من n-1 بمضروب العدد ويرمز له بالرمز !n وحسب هذا التعريف فان

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots\dots 2.1$$

وبصورة أخرى

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$$

وبشكل خاص فان 1=!1,0=!1 وكلما زاد قيمة n فان إيجاد مضروب العدد nيصبح عبئا كبيرا ولذا نستعين بجداول اللوغاريتمات وكذلك أيضا يمكن الاستعانة بصيغة ستيرلنغ وهي

$$n! \cong \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

وهذه قيمة تقريبية.
نظرية(2-2): أن عدد الترتيب لn من الأشياء المنفصلة عن بعضها البعض هو !n .
الإثبات : يوجد لدينا n مكان نريد ملؤها جميعا فأول مكان يمكن مائة بـ n طريقة والمكان الثاني ب n-1 المتبقية وكذلك المكان الثالث وهكذا وإذا استمرت العملية بهذا المنوال وباستخدام قاعدة الضرب فان عدد الترتيب يصبح

$$n! = n(n-1)(n-2)................2.1$$

ويتم المطلوب
سوف نرمز إلى ترتيب n من الأشياء غير المرتبطة مع بعضها البعض بالرمز nPn ويمكن حسابه من العلاقة nPn=n!

مثال(2-4): بكم طريقة يمكن لسبعة اشخاص أن يقفو في صف واحد أمام مدخل دائرة حكومية ؟
الحل: عدد الترتيب =

$$7P7 = 7! = 5040$$

نظرية (2-2) : أن ترتيب n من الأشياء غير المرتبطة مع بعضها البعض مأخوذ k مرة فان عدد الترتيب الناتجة :

$$np_k = \frac{n}{(n-k)}$$

الإثبات: أن عدد الاماكن المراد ملئها هو k مكان فالمكان الأول يمكن ملئه بأحد n من الأشياء والمكان الثاني بأحد الأشياء المتبقية وهي n-1 وبطريقة مماثلة فان المكان k يمكن ملئه بأحد الأشياء المتبقية وهي [n-(k-1)] وباستخدام قاعدة الضرب فأنة يمكن كتابة

$$nPk = n(n-1)..........[n-(k-1)]$$

والعلاقة أعلاه إذا ضربت بمقدار

$$\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

فان العلاقة تصبح على النحو

$$npk = \frac{n(n-1)..............[n-(k-1)](n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال(2-5): كم كلمة من حرفين يمكن تكوينها من أحرف الكلمة اشترى

الحل :أن كلمة اشترى مكونه من خمسة حروف وعلية فان عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من الكلمة ذات الخمسة حروف =5P2

نظرية(2-3): إذا كان لدينا n_1 من الأشياء من النوع الأول ، وn_2 من الأشياء من النوع الثاني ،

............n_k من الأشياء من النوع k وكان

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

وإذا أردنا ترتيب n من الأشياء فان عدد التراتيب الناتجة هي

$$\frac{n!}{n!n_2!.......n_k!}$$

مثال(2-6): كم كلمة يمكن تكوينها من كلمة(السلاسل)

الحل : أن كلمة السلاسل مكونة من ثلاثة أحرف مختلفة هي أ، س، ل حيث $n_1=2,n_2=2,n_3=3$ فان عدد الكلمات المختلفة الممكن تكوينها هي :

$$\frac{7!}{2!2!3!} = \frac{7.6.5.4.3!}{2.2.3!} = 210$$

2-5: الترتيب الدائري:

إن عدد الترتيب الناتجة من ترتيب n من الأشياء حول دائرة هو

$$nPn = (n-1)!$$

مثال(2-7): بكم طريقة يمكن جلوس سبعة اشخاص حول طاولة

الحل: إن عدد طرق جلوس سبعة أشخاص حول طاولة معينة يمكن إيجاده من العلاقة أعلاه

$$7P7 = (7-1)! = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

2-6التوافيق Combination

تعريف:التوافيق هو اختيار عشوائي ل k من الأشياء من بين n من الأشياء المعتاد وبحيث أن k?n مع ملاحظة أن الترتيب مهم في التباديل بينما الترتيب ليس له أهمية في التوافيق وإذا أردنا توضيح هذ المفهوم فيمكن الاستفادة من الجدول (2-1)الذي يوضح طرق الترتيب وطرق الاختيار من ثلاثة حروف A,B,C مأخوذة اثني

التوافيق	التباديل
AB	AB,BA
AC	AC,CA
BC	BC,CB

جدول (2-1)

وقبل الدخول في نظريات التوافيق نعرف أولا مفهوم

$$\binom{n}{k} \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...........[n-(k-1)]}{1.2.........k} ....(1-1)$$

وبشكل خاص فان

$$\binom{n}{n} = 1, \binom{0}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{0} = 1$$

خواص

$$\binom{n}{k}$$

a) إذا كان n عدد صحيح غير سالب وكان k اكبر من n فان

$$\binom{n}{k} = 0$$

الإثبات: لان I<n<k فمن تعريف

$$\binom{n}{k}$$

فان البسط للكسر سيكون صفرا وبالتالي فالكسر يصبح صفرا ايضا

b) اذا كان n عددا صحيحا ليس سالبا وكان n>k فان

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

الإثبات : نضرب البسط والمقام للعلاقة (2-1) في !(n-k) لتصبح العلاقة

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots[n-(k-1)](n-k)!}{1.2\ldots\ldots\ldots k.(n-k)!}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2-1)$$

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}\ldots\ldots(2-3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(c$$

الإثبات : نكتب مفكوك الطرف الأيسر حسب العلاقة (2-1)

الطرف الأيسر

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!}$$

نأخذ العامل المشترك

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left[1+\frac{n-k}{k+1}\right]$$

ثم بتوحيد المقامات

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{k+1+n-k}{k+1}\right)$$

$$=\frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)![n-k+1-1)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!}$$

$$=\binom{n+1}{k+1}$$

وهذا هو الطرف الأيمن ويتم المطلوب.

(d

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\dots\dots\dots\dots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$$

الإثبات:نثبت صحة العلاقة باستخدام الاستقراء الرياضي وذلك بأخذ$k=0$ نجد ان

$$\binom{n}{0}=1,\binom{n+1}{0}=1\Rightarrow\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$$

وعليه فان العبارة صحيحة عندما $k=0$

وعندما $k=1$ فان

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}=1+\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{n!+(n+1)!}{n!}$$

$$=\frac{n![1+(n+1)]}{n!}=\frac{n!(n+1)(n+2)}{n!(n+1)}=\frac{(n+2)!}{(n+1)!}$$

وذلك بضرب البسط والمقام في $n+1$

ثم نفرض أن العبارة الصحيحة عندما $k=t-1$ ونريد إثبات أن العبارة الصحيحة عندما $k=t$ أي أن

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\dots\dots+\binom{n+t-1}{t-1}+\binom{n+t}{t}=\binom{n+t}{t-1}+\binom{n+t}{t}$$

وبالعودة للخاصية © فان

$$\binom{n+t}{t-1}+\binom{n+t}{t}=\binom{n+t+1}{t}$$

وعلية فان العلاقة صحيحة عندما $k=t$

e) العلاقة التالية تعتبر من الخصائص الهامة في التوافيق

$$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$$

الإثبات : نأخذ الطرف الأيمن ونكتب مفكوكة

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

نأخذ الطرف الأيسر ونكتب مفكوكة

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{[n-(n-k)]!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

من $(1),(2)$ نلاحظ انهما متساويتان وهو المطلوب .

نظرية (2-4) : إذا كان لدينا n من الأشياء غير مرتبطة مع بعضها البعض فان توافيق k من الأشياء مأخوذة معا سوف نرمز لها بالرمز nCk أو C أو C(n,k)

$$nC_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

وبقسمة كلا الطرفين على k! ينتج أن

$$nC_k=\frac{nP_k}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

مثال (2-8) : بكم طريقة يمكن اختيار أربعة كتب من بين ثمانية كتب .

الحل : عدد طرق الاختيار

$$8C4=\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!(8-4)!}=\frac{8!}{4!4!}=\frac{8.7.6.5.4!}{4.3.2.1.4!}=70$$

مثال(2-8): يراد اختيار لجنة مكونة من خمسة أشخاص من بين سبعة طلاب ذكور وخمسة بنات وبحيث أن تكون اللجنة المختارة منها ثلاثة ذكور وبنتان.

الحل:عدد طرق اختيار اللجنة هو

$$\binom{4}{2}\binom{7}{3}=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=6\times35=210$$

نظرية(2-5) :إن توافيق(n-k) من بين n أشياء ونعني به عدد الطرق هو مساويا لعدد طرق n مأخوذ منه k شيئ أي

$$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$$

الإثبات: إن عدد التوافيق هو

$$\binom{n}{n-k},\binom{n}{k}$$

وقد أثبتنا أن

$$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$$

من خاصية سابقة وهو المطلوب

تعريف (2-2): إذا كان

$n_1, n_2, \ldots\ldots\ldots n_r$

أعدادا صحيحة غير سالبة وكان

$$n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n_r \Rightarrow \binom{n}{n_1, n_2, \ldots\ldots\ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots\ldots\ldots\ldots n_r!}$$

مثال(9-2): أوجد قيمة

$$\binom{7}{2,3,2}$$

الحل: من تعريف(2-1) فإن

$$\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2!3!2!} = 210$$

نظرية(6-2): لتكن المجموعة A محتوية على n من العناصر وليكن

$n_1, n_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, n_r$

أعدادا صحيحة موجبة وبحيث أن

$$n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n_r$$

فإذا كانت .

$$Ai, i = n_1, n_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n_r$$

حيثAi تمثل المجموعات الجزئية للمجموعة A فان عدد الطرق التي يمكن ان تجزء إليها هذه المجموعات هي

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots\ldots\ldots\ldots n_r!}$$

الإثبات : إن عدد عناصر المجموعة الجزئية An_1 هو n_1 وبالتالي فان عدد طرق اختيار عناصرها $\binom{n}{n_1}$ وان عدد عناصر المجموعة الجزئية An_2 هو n_2 وعدد

اختيار عناصرها من عدد العناصر المتبقية وهي $n-n_1$ هو بنفس الطريقة نستمر إلى أن يكون عدد طرق اختيار عناصر المجموعة الجزئية An_r هو

$$\binom{n - n_1 - n_2, \ldots, n_{r-1}}{n_r}$$

وعلية فان عدد اختيار عناصر المجموعة A يصبح

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\ldots\ldots\binom{n - n_1 - n_2 \ldots\ldots - n_{r-1}}{n_r}$$

$$= \frac{n!}{n!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2(n-n_1-n_2)} \ldots\ldots \frac{(n - n_1 - n_2 \ldots\ldots\ldots n_{r-1})!}{n_r!(n - n_1 - \ldots\ldots\ldots -, -n_{r-1} - n_r)!}$$

وبعد عمليات الاختصار يبقي

$$= \frac{n!}{n_1 n_2 \ldots\ldots\ldots\ldots n_r}$$

وهو المطلوب مع ملاحظة أن

$(n-n_1-n_2-..........-n_r)!=0!=1$

مثال (2-10) :يراد توزيع ثمانية كتب مختلفة بين ثلاثة أولاد بحيث يراد إعطاء الولد الأول كتابين وللولد الثاني ثلاثة كتب وللولد الثالث ثلاثة كتب أيضا بكم طريقة يمكن توزيع الثمانية كتب بين الثلاثة أولاد .

الحل : أن عدد طرق التوزيع هو

$$\frac{8!}{2!3!3!}=560$$

2-7 نظرية ذات الحدين.

أن المقدار (a+b) عبارة عن ذي حدين حيث a تمثل الحد الأول ، b تمثل الحد الثاني وبفك ذي الحدين حسب الأسس الصحيحة الموجبة وعلى سبيل المثال فان مفكوك كل من المقادير التالية على النحو

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

ونلاحظ أن عدد حدود المفكوك =الأس +1 ومثال ذلك إن عدد حدود مفكوك المقدار $(a+b)^4$ هو 4+1=5 وكلما زاد الأس فان اخذ المفكوك يزداد صعوبة لذا اصبح من الضروري البحث عن صيغة لإيجاد المفكوك يسهل عملية اخذ المفكوك.

نظرية (7-2): على اعتبار أن n عدد صحيح موجب ولكل قيم a,b فان

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+...........+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

أو بصيغة المجموع

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\;..................(2-4)$$

$$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$$

لذلك ففي المساواة الأولى فان معامل $a^n, b^n=1$

الإثبات : سوف نثبت هذه النظرية باستخدام الاستقراء الرياضي
أولا:فالعلاقة (2-4) صحيحة عندما n=1 حيث أن

$$(a+b)^1=\binom{1}{0}.a^{1-0}b^0+\binom{1}{1}.a^{1-1}b^1$$
$$=1.a+1.b=a+b$$
$$a+b=a+b$$

إذا أي أن العبارة متحققة عندما n=1
ثانيا : نفرض صحة العبارة عندما n=k أي

$$(a+b)^k=a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\dots\dots\dots\dots+\binom{k}{k-1}ab^{k-1}+\binom{k}{k}b^k$$

ثالثا : نثبت صحة العبارة عندما n=k+1 لذا نضرب طرفي المعادلة أعلاه في(a+b) لتصبح العلاقة كما يلي

$$(a+b)^k(a+b)=(a+b)(a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\dots\dots+\binom{k}{k-1}ab^{k-1}+\binom{k}{k}b^k)$$
$$\Rightarrow(a+b)^{k+1}=a^{k+1}+\binom{k}{1}a^kb+\binom{k}{2}.a^{k-1}b^2+\dots\dots\dots+\binom{k}{k-1}a^2b^{k-1}+\binom{k}{k}a^1b^k$$
$$+\binom{k}{0}a^kb+\binom{k}{1}a^{k-1}b^2+\dots\dots\dots+\binom{k}{k-2}a^2b^{k-1}+\binom{k}{k-1}a^1b^k+b^{k+1}$$

والعلاقة أعلاه نستخدمها في العلاقة (2-3) ونعيد ترتيبها لنحصل على

$$(a+b)^{k+1}=a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^kb+\dots\dots\dots+\binom{k+1}{k}ab^k+b^{k+1}$$

وبهذا فان النظرية تكون قد أثبتت

ملاحظة : نسمي

$$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\ldots\ldots\binom{n}{n}$$

عوامل ذات الحدين

مثال (2-11) : أوجد مفكوك المقدار $(3+2x)^5$

الحل : حسب العلاقة (2-4) فان المفكوك يصبح كالتالي هنا

$a=3$, $b=2x$ وعلية

$$(3+2x)^5 = 3^5 + \binom{5}{1}3^4(2x) + \binom{5}{2}3^3(2x)^2 + \binom{5}{3}3^2(2x)^3 + \binom{5}{4}3^1(2x)^4 + \binom{5}{5}(2x)^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243$$

و لإيجاد معاملات ذات الحدين يمكن استعمال مثلث باسكال على النحو التالي

$(a+b)^0 = 1$ 1

$(a+b)^1 = a+b$ 1 1

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ .... 1 .... 2 1

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ .... 1 .... 3 .... 3 1

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ .... 1 .... 4 .... 6 .... 4 1

نلاحظ أن في مثل مثلث باسكال بداية الصف وبنهايته العدد واحد 1

وباقي عناصر الصف يكون مجموع العدديين العلويين وهكذا
تعميم نظرية ذات الحدين نعني بذلك إذا كان هناك اكثر من حدين ونريد إيجاد المفكوك لها وعلية فان التعميم يصبح كالتالي

$$(a_1 + a_2 + \dots\dots\dots + a_k)^n = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots\dots a_k^{n_k},$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots\dots\dots + n_k$$

مثال(2-12): أوجد مفكوك $(a+b+c)^3$

الحل: في مثالنا أن $k=3, n=3$ وحسب التعميم أعلاه

وبعد الاختصار والعمليات الحسابية نجد أن
$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 6abc$

تمارين على الوحدة الثانية

1) من أحرف كلمة الذهاب وبشرط أن يستعمل الحرف مرة واحدة كم كلمة يمكن تكوينها .
a) إذا أخذت الأحرف جميعها مرة واحدة .
b)إذا أخذت ثلاثة أحرف .
مع عدم أخذ المعنى بعين الاعتبار.

2)من أحرف كلمة الجلوس وبشرط استعمال الحرف مرة واحدة .كم كلمة يراد تكوينها
A) إذا إستعملت الست حروف معا.
B) كلمة تبدأ بالحرف أ ومكونة من أربعة حروف

C) كلمة مكونة من خمسة أحرف اثنان منهم أحرف علة وثلاثة ليست أحرف علة.
D) كلمة مكونة من أربعة حروف داخلها الحرف و.

3) بكم طريقة يمكن لخمسة أشخاص الجلوس بحيث اثنان معينان لا يجلسان بجانب بعضهما البعض.

4) كيس به ست كرات مرقمة من 1 إلى 6
A) بكم طريقة يمكن سحب ست كرات إذا كان السحب دون إرجاع
B) بكم طريقة يمكن سحب أربعة كرات من الكيس إذا كان السحب دون إرجاع

5) شخص لديه ست أزواج من الأحذية المختلفة بكم طريقة يمكن أن يختار هذا الشخص زوج من الأحذية بحيث لا يكون الزوج متطابق مع بعضه البعض (واحدة يسرى والأخرى يمنى)

6) بكم طريقة يمكن جلوس خمس بنات وولدان في صف بحيث لا يجلس طالبان جنبا إلى جنب

7) بكم طريقة يمكن جلوس 11 شخص حول طاولة مستديرة بحيث أن ثلاثة أشخاص معينين جنبا إلى جنب .

8) إذا كان n>0 و r?1 ،r<n, فاثبت أن

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$$

9) لدينا 12 شخص 7 منهم يريدون الجلوس في الغرفة A و5، في الغرفة B فإذا كان ثلاثة من الاثني عشر شخصا لا يريدون الجلوس في الغرفة A واثنان منهم لا يريدون الجلوس في الغرفة B بكم طريقة يمكنهم الجلوس في الغرفة A, B .

10)أمام الطالب خمس كتب رياضيات مختلفة وسبعة كتب فيزياء مختلفة فإذا

أراد هذا الطالب أن يختار اثنان رياضيات ، أربعة فيزياء فبكم طريقة يمكنه عمل ذلك.

11) إذا كان لدى طالب عشرين طابع للأردن ،وخمسة عشر سوريا ،و عشرة مصر أراد أن يختار ثلاث طوابع للأردن ، اثنان طابعان سوريا طابعان مصر فبكم طريقة مختلفة يمكن عمل ذلك.

12) يراد ترتيب 15 كتاب على 4 رفوف بحيث يكون 4 كتب على الرف الأول ، 6 كتب على الرف الثاني و 3 كتب على الرف الثالث وكتابين على الرف الرابع بكم طريقة يمكن عمل هذا الترتيب.

13) عمارة بها 5 مصاعد وكل مصعد يستطيع حمل شخص 1 أراد ثلاثة أشخاص أن يستعملوا هذه المصاعد فبكم طريقة يمكنهم الصعود بها ؟

14) اذا كان n>0 فاثبت ان

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots\dots\dots\dots+\binom{n}{n-1}=2^n-1$$

15) لدى طالب 12كتاب بكم طريقة يمكنه اختيار كتابين فاكثر من بين هذه الكتب.

16) برهن أن

$$1)\sum_{r=0}^{m}\binom{n}{r}\binom{n}{m-r}=\binom{mn}{m}$$

$$2)\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

17) في مفكوك $(4x^3+7y^2)^5$ عرف الحد الذي يحتوي على y^8 .

18) أوجد معامل الحد y^{12} في مفكوك $(2x-3y^3)^8$

19)برهن أن

$$P(10,4)+P(10,3)=64P(10,2)$$

20) جد قيمة nإذا كان

$$P(n+1,3)=2P(n,3)$$

21) جد قيمة n إذا كان

$$p(n,5)=90p(n-2,3)$$

الفصل الثالث
الارتباط والانحدار

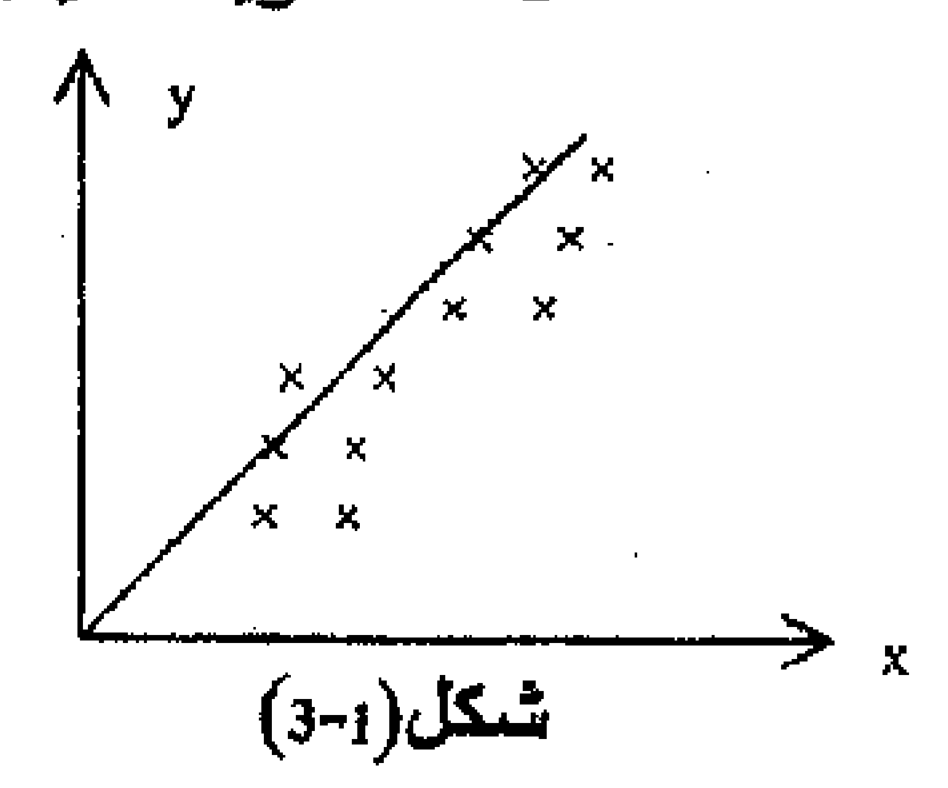
الفصل الثالث

الارتباط والانحدار

3-1) طريقة جداول الانتشار

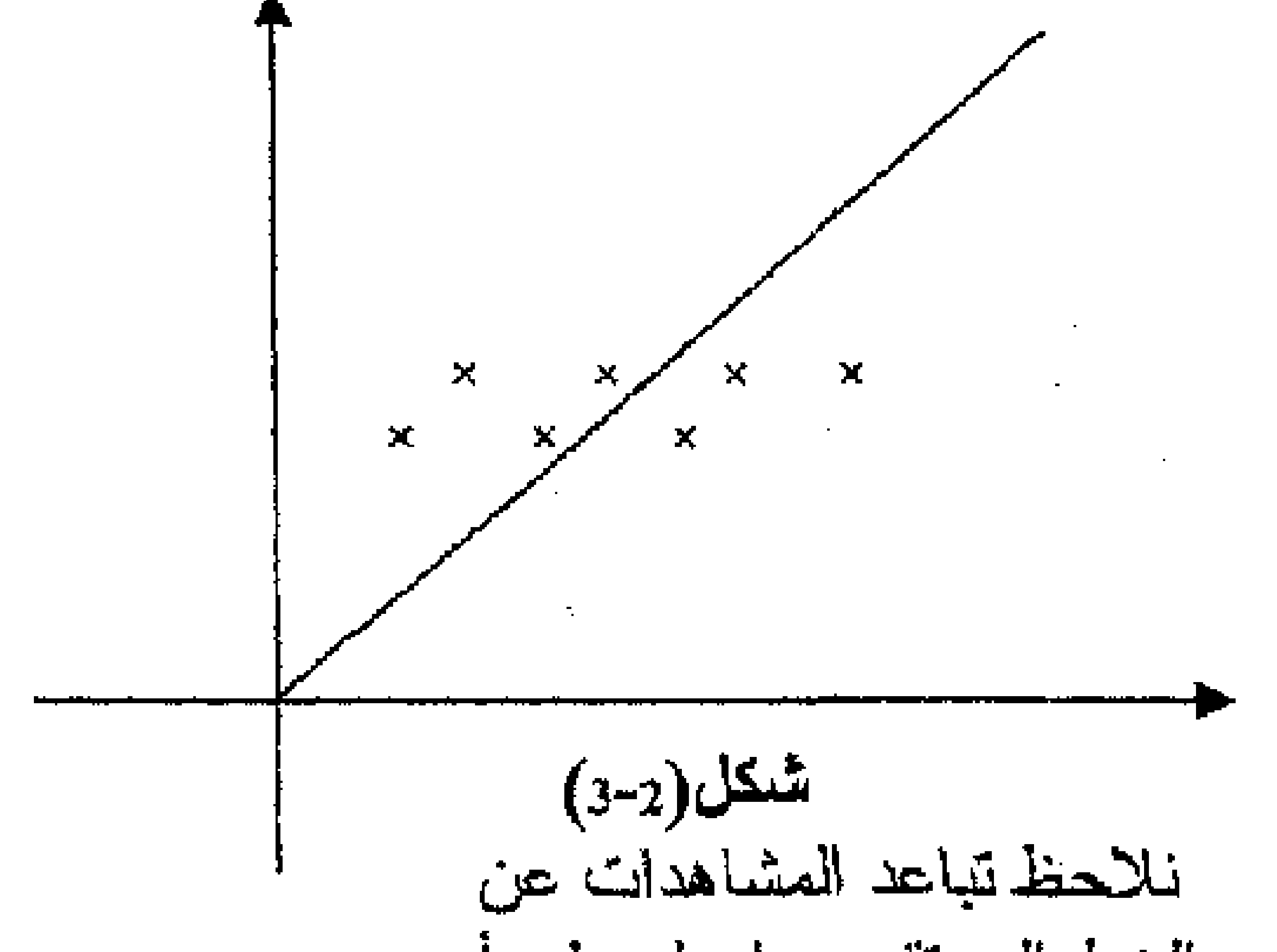
حتى نستطيع ان نتعرف على مفهوم الارتباط من خلال جداول الانتشار لا بد من التعرف اولا على كيفية تكون جدول الانتشار ويتم من خلال الخطوات التالية.

- نرسم احداثيين الافقي والرأسي حيث يمثل على المحور الافقي الظاهرة x وعلى المحور الرأسي الظاهرة y.
- نعين النقاط التي يمثل فيها الاحداثي السيني قيمة من قيم المتغير x والاحداثي الصادي قيمة من قيم المتغير y.
- نحاول تحرير منحني من اغلب النقاط بحيث يتوسط القيم ونلاحظ بعد توزيع النقاط الاشكال الانتشارية التالية:



شكل(3-1)

نلاحظ تكثف المشاهدات حول الخط المستقيم مما يشير الى أن العلاقة خطية والارتباطايجابي طردي) قوي)

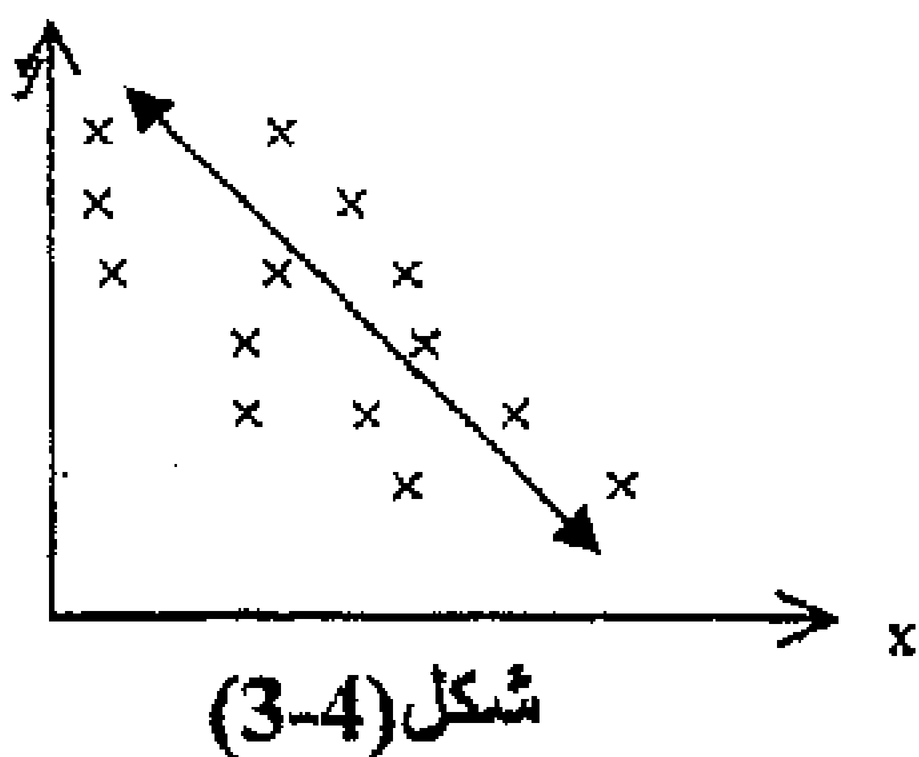


شكل(3-2)

نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن العلاقة طردية(موجبة)لكنها ضعيفة.

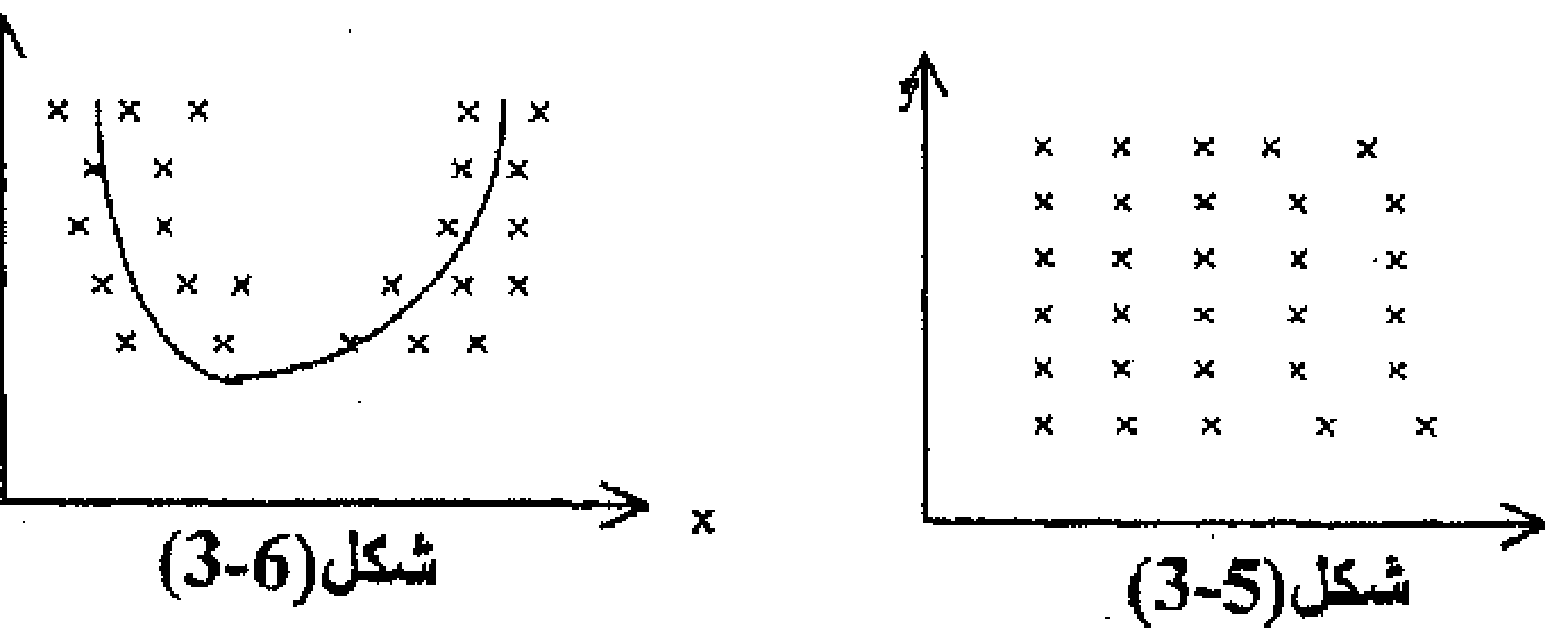
شكل(3-3)

نلاحظ تكثف النقاط حول الخط المستقيم مما يشير الى (أن العلاقة عكسية سالبة) والعلاقة قويه



شكل(3-4)

نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن (أن العلاقة عكسية سالبة) والعلاقة ضعيفة



شكل(3-5)

أما اذا اتخذ الشكل الانتشاري الشكل أعلاه نقول أنه لا يوجد علاقة بين المتغيرين X,y

شكل(3-6)

أما اذا اتخذ الشكل الانتشاري الشكل أعلاه فاننا نقول أن العلاقة ليست خطية وانما من الدرجة الثانية

2-3 معامل الارتباط وخصائصه

كما اسلفنا بأنه يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرين بمقياس هو معامل الارتباط والذي سنرمز له بالرمز ر وهذا سيتخذ قيمة عددية تتراوح بين $-1 \le r \le 1$ واذا وجد قيمة اكبر او اصغر من هذه الحدود دلالة على ان هناك خطأ حسابي قد تم، وللمعامل دلالات نوردها في ما يلي لتفسير العلاقة بين المتغيرين.

1) اذا كانت $r = -1$ فان العلاقة بين المتغيرين تكون عكسية تامة.

2) اذا كانت $-1 < r < 0$ فان العلاقة تكون علاقة عكسية.

3) اذا كانت $r = 0$. فهذا يعني انه لا وجود لأي علاقة بين المتغيرين.

4) اذا كانت $0 < r < 1$ فهذا يعني انه يوجد علاقة ايجابية تقوى كلما اقتربنا من الواحد صحيح.

5) عندما تكون r =1 فان العلاقة تكون علاقة تامة.

3.3 طرق إيجاد معامل الارتباط: نجد معامل الارتباط بطريقة

3.3.1 معامل ارتباط بيرسون: لأيجاد معامل الارتباط بهذة الطريقة

- نجد $\sum x, \sum y$
- نجد $\sum x^2$ أي مربع كل مشاهدة من x ثم المجموع.
- نجد $\sum y^2$ أي مربع كل مشاهدة في y ثم المجموع
- نجد معامل الارتباط من العلاقة

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}\right)}}$$

مثال(3-1): اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية للمتغيرين x,y

x	1	2	3	4	5	15	المجموع
y	3	6	9	12	15	45	

جدول (6-3)

المطلوب: ايجاد معامل الارتباط

الحل: نشكل الجدول التالي والذي يحوي جميع الحسابات المطلوبة للحل.

الرقم	x	y	xy	x^2	y^2
1	1	3	3	1	9
2	2	6	12	4	36
3	3	9	27	9	81
4	4	12	48	16	144
5	5	15	75	25	225
المجموع	15	45	165	55	495

جدول (6-2)

من البيانات اعلاه نجد قيمة r

$$r_{x,y} = \frac{165 - \frac{15 \times 45}{5}}{\sqrt{\left(55 - \frac{15 \times 15}{5}\right)\left(995 - \frac{45 \times 45}{5}\right)}}$$

$$\frac{30}{\sqrt{10 \times 90}} = \frac{30}{\sqrt{900}} = \frac{30}{30} = 1$$

أي ان الارتباط ايجابي تام

مثال(3-2) : البيانات التالية تمثل قيم x,y مرتبة في الجدول (3-3)

المجموع						
26	7	5	4	7	3	x
30	8	6	8	6	2	y

جدول (3-3)

المطلوب ايجاد معامل الاتباط لهذه البيانات

الحل: نكون الجدول (3-4) والمحتوي على البيانات المطلوبة لحل السؤال

y^2	x^2	xy	y	x	الرقم
4	9	6	2	3	1
36	49	42	6	7	2
64	16	32	8	4	3
36	25	30	6	5	4
64	49	56	8	7	5
204	148	166	30	26	المجموع

جدول (3-4)

من البيانات اعلاه نجد قيمة r من العلاقة

$$r = \frac{166 - \frac{30 \times 26}{5}}{\sqrt{\left(148 - \frac{26 \times 26}{5}\right)\left(204 - \frac{30 \times 30}{5}\right)}}$$

$$= \frac{166-156}{\sqrt{(148-135.2)(204-180)}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{128 \times 24}} = \frac{10}{\sqrt{307.2}} = \frac{10}{17.35} = 0.57$$

أي ان الارتباط بين المتغيرين x,y ايجابي (طردي) متوسط

مثال(3-3): البيانات التالية تمثل قيم المتغيرين x,y كما في الجدول (3-5) .

					المجموع
x	4	7	9	12	15	47
y	11	9	5	4	2	31

جدول (3-5)

المطلوب ايجاد معامل الارتباط بين المتغيرين x,y .

الحل: نشكل الجدول (3-6) والمحتوي على جميع البيانات المطلوبة للحل

الرقم	x	y	xy	x^2	y^2
1	4	11	44	16	121
2	7	9	63	49	81
3	9	5	45	81	25
4	12	4	48	144	16
5	15	2	30	225	4
المجموع	47	31	230	515	247

جدول (3-6)

من البيانات اعلاه نطبق العلاقة

$$r=\frac{230-\frac{31\times 47}{55}}{\sqrt{\left(515-\frac{47\times 47}{5}\right)\left(274-\frac{31\times 31}{5}\right)}}$$

$$=\frac{230-291.4}{\sqrt{(515-441.8)(247-192.2)}}$$

$$=\frac{-61.4}{\sqrt{73.2\times 54.8}}=\frac{-61.4}{63.34}=-0.97$$

وهذا ارتباط سلبي قوي

3-3-2 ايجاد معامل الارتباط بطريقة الانحراف المعياري

لذا نتبع الخطوات التالية

- نجد $\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$
- نجد S_x ثم S_yاو قد تكون في بعض الاسئلة معطاة
- نجد معامل الارتباط من العلاقة التالية.

$$r=\frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{SxSy}\qquad\ldots\ldots(3\text{-}6)$$

مثال(3-4): من البيانات المعطاة ادناه اوجد معامل الارتباط اذا كان:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=47,S_x=16,S_y=5,n=5$$

الحل: نطبق العلاقة

$$r=\frac{1}{5}\times\frac{47}{16\times 5}=\frac{47}{400}=0.12$$

∴ وهذا ارتباط ايجابي ضعيف.

3-3-3 معامل ارتباط سبيرمان للرتب:

كثيرا ما يستعمل هذا المعامل في البيانات الوصفية التي يستحيل عندها استخدام البيانات العددية بطريقة بيرسون وكذلك ايضا يستخدم في البيانات الرقمية لتسهيل العمليات الحسابية. لذا نلجأ لتحويل البيانات الوصفية الى عددية قابلة للحل..

- نجد تراتيب البيانات المعطاة سواء كانت وصفية او رقمية لكل من المتغيرين x,y ونرمز لهما بالرموز x' ، y' .

- نجد $d=x'-y'$ أي نجد الفرق بين التراتيب المناظرة

- . نأخذ مربع d ثم المجموع $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$

نطبق العلاقة

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

مثال(3-5) : البيانات التالية تعطي تقادير عشرة موظفين في احدى الشركات وكانت مرتبة كما في الجدول (3-7)

س(الأول)	جيد	جيد جدا	مقبول	جيد جدا	جيد	ممتاز	ممتاز	ضعيف	مقبول	جيد جدا
ص(الثاني)	مقبول	ممتاز	ضعيف	ممتاز	جيد جدا	جيد جدا	جيد	مقبول	جيد	جيد

جدول (3-7)

الحل: نشكل الجدول (3-8) يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل.

الرقم	x	y	x'	y'	$d = x'y'$	d^2
1	جيد	مقبول	6.5	8.5	2-	4.00
2	جيد جدا	ممتاز	4	1.5	2.5	6.25
3	مقبول	ضعيف	8.5	10	1.5	2.25
4	جيد جدا	ممتاز	4	1.5	2.5	6.25
5	جيد	جيد جدا	6.5	3.5	3	9.00
6	ممتاز	جيد جدا	1.5	3.5	2-	4.00
7	ممتاز	جيد	1.5	6	4.5-	20.25
8	ضعيف	مقبول	10	8.5	1.5	2.25
9	مقبول	جيد	8.5	6	1.5	2.25
10	جيد جدا	جيد	4	6	2-	4.00
المجموع						60.50

جدول (3-8)

- نرتب التقادير اعلاه كما ورد في x', y'

- نجد $d = x' - y'$

- نجد مربع d ثم المجموع $\sum d^2$ - ثم نطبق العلاقة

$$r = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{660.5}{10(100-1)} = 1 - \frac{363}{990} = 1 - 0.37 = 0.63$$

وهذا يدل على ان الارتباط جيد

ملاحظات على الحل.

- عندما كان لدينا قيم متكررة كنا نـأخذ ترتيب كل قيمة متكررة التصاعدي ثم نجمع هذه التراتيب ونأخذ متوسطها الحسابي فيكون هو ترتيب كل قيمة في x'.
فمثلا عند ترتيب قيم x لاحظنا ان التقدير ممتاز تكرر مرتين كان ترتيبهما التصاعدي 1،2 فيكون الترتيب لكل تقدير هو $\frac{2+1}{2} = 1.5$ فيوضع في عمود 1×الرقم 1.5 امام التقادير ممتاز وهكذا نضع قيم x', y' لباقي التقادير.

مثال(3-6): البيانات التالية تمثل درجات 10 طلاب في مبحثي الاحصاء والرياضيات وهي كما في الجدول (3-9)

درجة الاحصاء x	85	75	90	95	80	88	90	60	75	87
درجة الرياضيات y	80	85	75	75	80	72	85	65	70	83

جدول (3-9)

اوجد معامل ارتباط سبيرمان

الحل: نكون الجدول (3-10) والذي يحتوي على جميع البيانات المطلوبة

درجة الاحصاء x	درجة الرياضيات y	رتبة $x = x'$	رتبة $y = y'$	$d_i = x_i' - y_i'$	d_i^2
85	80	6	5.5	0.5	0.25
75	85	8.5	2	6.5	42.25
90	85	2.5	2	0.5	0.25
95	75	1	7	6.0-	36.00
80	80	7	5.5	1.5	2.25
88	72	4	8	4-	16.00
0	85	2.5	2	0.5	0.25
60	65	10	10	صفر	صفر
75	70	8.5	9	0.5-	0.25
87	83	5	4	1	1.0
					998.5

جدول (3-10)

بعد ايجاد هذه البيانات نطبق العلاقة.

$$r_{x,y} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

- ثم نطبق العلاقة

$$= 1 - \frac{6(98.5)}{10(100-1)} = 1 - \frac{591}{990}$$

$$= 1 - 0.6 = 0.4$$

∴ الارتباط ضعيف بين المتغيرين x,y وهذه الطريقة تسمى طريقة سبيرمان للرتب.

3-4 مفهوم الانحدار:

هو ايجاد معادلة رياضيــة تعبر عن العلاقـة بيـن المتغيرين x,y تستعمل للتنبؤ عن قيم سابقة وقيم مستقبلية لكل من x,y حسب المعلـوم منـهما وتكـون هذه المعادلة الرياضية خطية بصورتين.

ا) اذا كان الانحدار من y على x فان المعادلة هي

$$\hat{y} = ax + b \qquad (3\text{-}4)....................$$

المطلوب هو التعرف على قيم a,b لصياغة المعادلة وتسمي a: معامل الانحدار او ميل خط الانحدار ، وهو قيمة تقديرية بينما b: نقطـة تقـاطع الانحـدار مـع المحـور الرأسي ويمكن ايجاد قيم a,b من العلاقة.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}$$

ثم نجد b من العلاقة

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

حيث x', y' هو المتوسط الحسابي للظاهرة x، الظاهرة y.

ب) لايجاد معادلة انحدار x على y فاننا نكتب المعادلة التالية :

$$\hat{x} = a'y + b'$$

ولايجاد قيم a', b' من العلاقة :

$$a' = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}} \quad ....(3-7)$$

ولايجاد b' نجدة من العلاقة

$$b' = x' - a'y' \quad ......(3-8)$$

3-5 : العلاقة الرياضية بين معاملي الانحدار ومعامل الارتباط:

$$r^2 = a \times a'$$

وهذا ما نسمية بمعامل التحديد ولتوضيح ما سبق نورد الأمثلة التالية:

مثال(3-7): البيانات التالية تمثل اجور ونفقات خمسة عمال من عمال شركة ما مرتبة في الجدول (3-11)

اجور اسبوعية x	20	15	18	20	25
نفقات اسبوعية y	15	14	18	15	20

جدول (3-11)

والمطلوب ايجاد .

a) معامل ارتباط بيرسون

b)معادلة انحدار y/x أي انحدار y على x باستخدام القانون العام والمربعات .

c)معادلة انحدار x/y اي x على y.

d)معامل الارتباط من معامل انحدار yعلى x,x على y ثم قارن نتيجة d مع نتيجة a

e)اوجد معادلة انحدار y على x من الدرجة الثانية

f) اوجد نفقات عامل ما اذا كان مرتبة 40 دينار.

الحل: نكون الجدول (3-12) الذي يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل

x^4	x^3	x^2y	y^2i	x^2i	xiyi	yi	xi
160000	8000	6000	225	400	300	15	20
50625	3375	3150	16	225	210	14	15
104976	5832	5832	324	324	324	18	18
16000	8000	6000	225	400	300	15	20
30625	15625	12500	400	625	500	20	25
866226	40832	33482	1370	1974	1634	82	98

جدول (3-12)

(حيث الصف الاخير يمثل المجموع)

أ- نجد معامل ارتباط بيرسون من العلاقة

$$r = \frac{1634 - \frac{98 \times 82}{5}}{\sqrt{\left(1974 - \frac{98 \times 98}{5}\right)\left(1370 - \frac{82 \times 82}{5}\right)}}$$

$$= \frac{1607.2 - 1634}{\sqrt{(1964 - 1920.8)(1370 - 1344.8)}}$$

$$= \frac{26.8}{\sqrt{53.2 \times 25.2}} = \frac{26.8}{\sqrt{340.64}}$$

$$= \frac{26.8}{36.61} = 0.73$$

وهذا معامل ارتباط جيد

$$a = \frac{1634 - \frac{98 \times 82}{5}}{1974 - \frac{98 \times 98}{5}}$$

$$= \frac{1634 - 1607.2}{1947 - 1920.8}$$

$$= \frac{26.8}{53.2} = 0.5$$

$\therefore a = 0.5$

$\bar{x} = 19.6, \bar{y} = 16.4$

و لايجاد b نجد

ثم نجد قيمة b من العلاقة التالية:

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 16.4 - 0.5 \times 19.6$$
$$= 16.4 - 9.8$$
$$= 6.6$$

معادلة انحدار y/x هي:

$$\hat{y} = 0.5x + 6.6$$

c)و لايجاد معادلة انحدار x على y نجد اولا

$$a' = \frac{1634 - \frac{98 \times 82}{5}}{1370 - \frac{82 \times 82}{5}}$$
$$= \frac{1634 - 1607.2}{1370 - 1344.8}$$
$$= \frac{26.8}{25.2} = 1.06$$
$$\therefore a' = 1.06$$

لأيجاد b' نجدة من العلاقة

$$b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$
$$= 19.6 - 1.06 \times 16.4$$
$$= 19.6 - 17.384 = 2.216$$

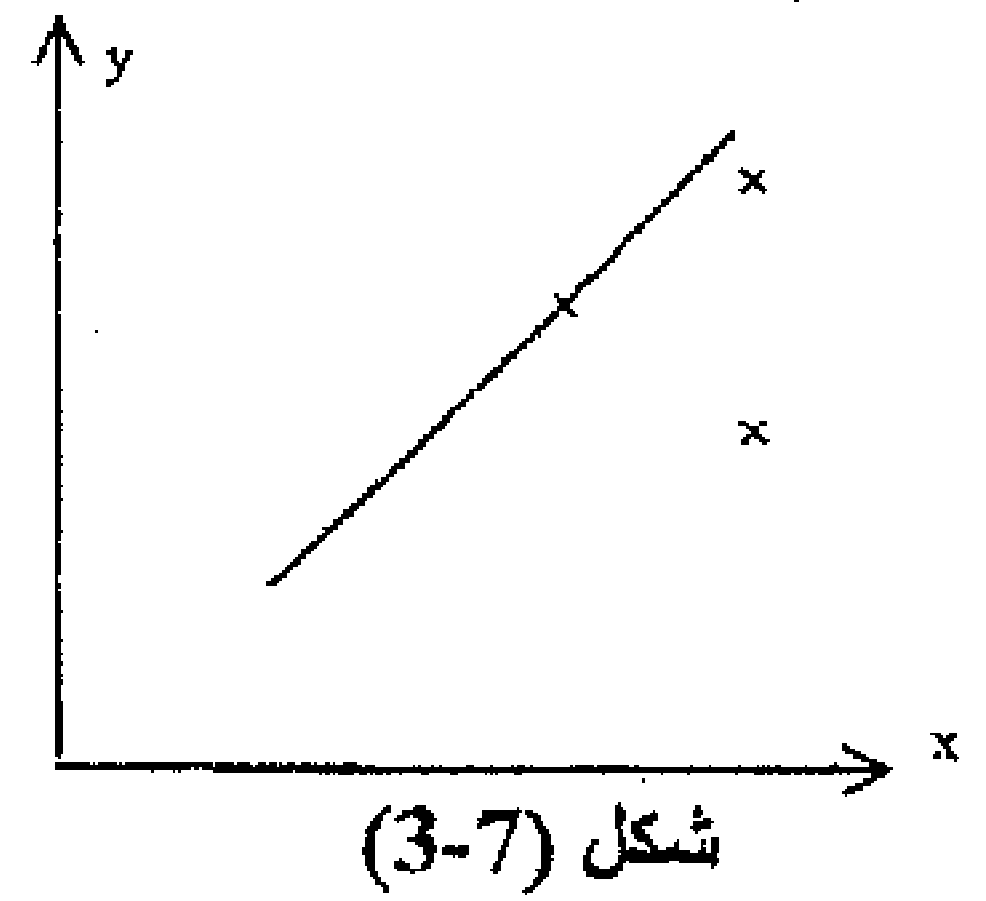
وعليةفان المعادلةالمطلوبة

$$x = 1.06y + 2.216$$

d) نجد معامل الارتباط من العلاقة

$$r^2 = a \times a'$$
$$= 0.5 \times 1.06 = 0.53$$
$$\therefore r = \sqrt{0.53} = 0.73$$

(1) نبدأ برسم لوحة الانتشار الموضح في شكل (3-7)



والخط المبين يمر باغلب النقط

شكل (3-7)

(2)أ- معامل ارتباط بيرسون نجده من العلاقة التالية

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}\right)}}$$

a)

$$r = \frac{28416 - \frac{368 \times 383}{5}}{\sqrt{\left(27454 - \frac{368 \times 368}{5}\right)\left(29701 - \frac{383 \times 383}{5}\right)}}$$

$$= \frac{28416 - 28188.8}{\sqrt{(27454 - 27084.8)(29701 - 29337.8)}}$$

$$= \frac{227.2}{\sqrt{363.2 \times 369.2}}$$

$$= \frac{227.2}{366.1} = 062$$

ب- معامل ارتباط سبيرمان كطريقة اخرى.

$$r = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 8}{5(25-1)}$$

$$= 1 - \frac{48}{120} = 1 - 0.4 = 0.6$$

3) ان معادلة خط انحدار y على x هي

$$\hat{y} = ax + b$$

يتم تحديد كل من a,b من العلاقات التالية

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i . \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}$$

$$= \frac{227.2}{369.2} = 0.62$$

ثم نجد b من العلاقة

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 76.6 - 0.62 \times 73.6$$

$$= 76.6 - 45.6 = 31$$

∴ المعادلة المطلوبة هي: $\hat{y} = 0.62x + 31$

لايجاد معادلة انحدار x على y تكون $x = a'y + b'$

وبايجاد الثوابت a', b' تكون

$$a' = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}} = \frac{227.2}{363.3} = 0.63$$

ثم نجد b' من العلاقة

$$b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$
$$= 73.6 - 76.6 \times 0.63$$
$$= 73.6 - 48.3 = 25.3$$

وتكون المعادلة المطلوبةهي $\hat{x} = 0.63y + 25.3$

5)لايجاد معامل الارتباط من العلاقة

$$r = \sqrt{a \times a'} = \sqrt{0.62 \times 0.63} = 0.621$$

6) لتقدير معدل طالب في الثانوية العامة نعوض عن معدله في السنة الاولى.

$$\hat{x} = 0.63 \times 88 + 25.3$$
$$= 55.44 + 25.36$$
$$= 80.84$$

7)لتقدير معدل طالب في السنة الاولى نعوض عن معدله في الثانوية العامة.

$$\hat{y} = 0.62 \times 76 + 31 = 78.12$$

3-6) معامل الاقتران

تعريف(1 -3): هو معامل يقيس مدى قوة العلاقة بين ظاهرتين لها اوضاع مختلفة لا تتعدى حالتين وتكون الصورة العامة لها كما في جدول (3-15).

II	I	الظاهرة الثانية
		الظاهرة الاولى
X_{21}	X_{11}	a
X_{22}	X_{21}	b

جدول (3-15)

أو في جدول (3-16)

الظاهرة الثانية / الظاهرة الأولى	1	2
I	a	b
II	c	d

جدول (3-16)

مثال(3-13): البيانات التالية تمثل وضع الانتاجية وعلاقتها مع وجود الحوافز في مؤسسة صناعية معينة مبينة بالجدول (3-16)

وجود الحوافز / وضع الانتاجية	موجود	غير موجود
تحسنت	16	9
لم تتحسن	2	10

جدول (3-17)

المطلوب: ايجاد معامل الاقتران بين المتغيرين اي بين وجود الحوافز ووضع الانتاجية

$$\frac{16\times10-2\times9}{16\times10+2\times9}=\frac{160-18}{160+18}$$
$$=\frac{142}{178}=0.978$$

وهذا يؤكد وجود ارتباط قوي بين ظاهرة الحوافز والانتاجية

3-7) معامل التوافق:

تعريف(3- 2): هو معامل يقيس مدى قوة العلاقة بين ظاهرتين مختلفتين بحالات مختلفة تزيد عن اثنتين

ويمكن ايجاده من العلاقة التالية

$$\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+n}} \qquad \text{.......(3-11)}$$

نجد اولا X^2 وهنا n تشير الى العدد الكلي لافراد الظاهرة قيد الدراسة

مثال(3-14): البيانات التالية تمثل توزيع الذكور والاناث على ثلاث كليات في جامعة ما مبينة بالجدول (3-18).

صنف الطلاب / الكليات	ذكور	اناث	المجموع
كلية العلوم الانسانية	1059 908	446 597	1505
كلية العلوم الطبيعية	283 179	119 223	402
كلية العلوم التطبيقية	860 1115	361 106	1221
المجموع	2202	926	3128

جدول (3-18)

الحل:نجد اولا القيم المتوقعة لقيم المشاهدات ونضعها ضمن مربعات صغيرة في أي زاوية نشاء.

القيمة المتوقعة

$$x'_{11} = \frac{1505 \times 2202}{3128} = 1059 \qquad x'_{12} = \frac{1505 \times 926}{3128} = 446$$

$$x'_{21} = \frac{402 \times 2202}{3128} = 283 \qquad x_{22} = \frac{402 \times 2202}{3128} = 119$$

$$x'_{33} = \frac{1221 \times 2202}{3128} = 860 \qquad x'_{32} = \frac{1221 \times 926}{3128} = 106$$

فنحسب قيمة x^2

$$x^2=\frac{(908-1059)^2}{1059}+\frac{(597-446)^2}{446}+\frac{(179-283)^2}{283}+\frac{(119-223)^2}{119}+\frac{(1115-860)^2}{860}$$

$$+\frac{(106-361)^2}{361}=457.499$$

معامل التوافق= $\sqrt{\frac{457.499}{3138+457.499}}=0.3572$

أي ان الارتباط بين ظاهرة اختيار الكلية وظاهرة الجنس من حيث الذكور والاناث هو ارتباط ضعيف.

مثال(3-15): البيانات التالية تمثل توزيع 270 مفردة بين الالوان والجنس مبينة بالجدول(6-19)

الجنس / الالوان	ذكر	انثى	المجموع
بني	80 [67]	40 [53]	120
وردي	30 [44]	50 [36]	80
أزرق	40 [39]	30 [31]	70
المجموع	150	120	270

جدول (6-19)

المطلوب: 1) ماهو نوع المتغيرين قيد الدراسة.

2) حساب معامل التوافق بين اللون والجنس.

الحل: تكون جدول الحل

1) نوع المتغيرين قيد الدراسة هي متغيرات تدل على الصفات (متغيرات وصفية)

(2) نجد اولا X^2

$$x'_{11} = \frac{120 \times 150}{270} = 67$$

$$x'12 = \frac{120 \times 120}{270} = 53$$

$$x'_{21} = \frac{80 \times 150}{270} = 44$$

$$x'_{22} = \frac{80 \times 120}{270} = 36$$

$$x'_{13} = \frac{70 \times 120}{270} = 39 \quad x'_{32} = \frac{70 \times 120}{270} = 31$$

$$x^2 = \frac{(80-67)^2}{67} + \frac{(40-53)^2}{53} + \frac{(30-44)^2}{44} + \frac{(50-36)^2}{36} + \frac{(40-39)^2}{39}$$

$$+ \frac{(30-31)}{31} = 15.666$$

معامل التوافق= $\sqrt{\frac{15.666}{15.666+270}} = 0.234$

وهذا يعني ان الارتباط ضعيف

3-8 الارتباط الجزئي والمتضاعف:
قبل الخوض في الارتباط الجزئي والمضاعف نرى من المفيد مراجعة المبادئ الأساسية للارتباط البسيط لمتغيرين يرتبطان بقاعدة خطية من النوع
$Yc = a + bX$
وقد وجدت هذه العلاقة بطريقة المربعات الصغرى .
وهذا سمح لنا أن نحسب تقديرا للمتغير المرتبط وهنا نعني بالمتغير المرتبط Yc من قيم المتغير المستقل وتاليا صرح بأن الاختلاف الكلي لقيم المتغير المرتبط ما هو إلا
1)الاختلاف المفسر + الاختلاف غير المفسر (أي الذي فشلنا في تفسيره بالفرضية) أي أن

$$\sum y^2 = \sum y_c^2 + \sum y_s^2$$

$$\sum y_c^2 = \sum Y_c^2 - \bar{Y}\sum Y$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - \bar{Y}\sum Y,$$

وعلينا أن نذكر بأن
وأن
وهنا

$$\sum Y_c^2 = a\sum Y + b\sum XY$$

وبشكل أكثر بساطة فأن

$$\sum y_c^2 = b\sum xy$$

بينما الخطأ المعياري للمقدر الذي سنرمز له بالرمز $S_{Y.X}$ والذي يمكن إيجاده من العلاقة

$$S_{Y.X} = \sqrt{\frac{\sum y^2_s}{N}}$$

ساعدنا لان نحكم على مدى الخطأ لمقدراتنا للمتغير المرتبط . ويمكن الحصول على

$$\sum y_s^2 = \sum y^2 - \sum y_c^2$$

واخيرا يمكن التعرف على مقياس آخر سمح لنا بان نحدد النسبة بين الاختلاف المفسر إلى الاختلاف الكلي وهذه النسبة تعرف بما يسمى معامل التحديد والذي سنرمز له بالرمز r^2 ويكتب على الصورة .

$$r^2 = \frac{\sum y_c^2}{\sum y^2}$$

والجذر التربيعي لهذا المعامل ما يعرف بمعامل الارتباط .

3-8-1 الارتباط المتضاعف :

إن القواعد والأسس في إيجاد معامل الارتباط البسيط هي نفسها في الارتباط المتضاعف . لكن الطريقة فيها صعوبة وشغل اكثر . لان هنالك أكثر من متغير مستقل ونحتاج إلى استخدام رموز مختلفة واكثر دقة . والتوضيح في هذا الفصل يتعلق بالمثال التالي

مثال(3-16): أجريت دراسة على المستوى التحصيلي لعشرة طلاب ومدى ارتباطه بالدخل الشهري لكل طالب واجرة البيت الشهرية وساعات الدراسة اليومية لكل طالب وساعات الراحة التي يقضيها الطالب وجمعت البيانات الواردة في الجدول(3-20)

رقم الطالب	X_1	X_2	X_3	X_4
1	72	5	50	130
2	54	6	45	100
3	65	7	35	80
4	70	6	60	145
5	80	4	30	139
6	75	3	35	120
7	65	7	40	115
8	90	5	35	110
9	65	6	25	90
10	70	5	25	75
$\sum X$	706	54	380	1104
X	70.6	5.4	38	110.4

جدول(3-20)

والمطلوب إيجاد معامل الارتباط البسيط والجزئي والمتضاعف لمختلف المتغيرات.

الحلبنكون أولا جدول الحل(3-21)

الرقم	X^2_1	X^2_2	X^2_3	X^2_4	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_2X_3	X_2X_4	X_3X_4
1	5184	25	2500	16900	360	3600	9360	250	650	6500
2	2916	36	2025	10000	324	2430	5400	270	600	4500
3	4225	49	1225	6400	455	2275	5200	245	560	2800
4	4900	36	3600	21025	420	4200	10150	360	870	8700
5	6400	16	900	19321	320	2400	11120	120	556	4170
6	5625	9	1225	14400	225	2625	9000	105	360	4200
7	4225	49	1600	13225	455	2600	7475	280	805	4600
8	8100	25	1225	12100	450	3150	9900	175	550	3850
9	4225	36	625	8100	390	1625	5850	150	540	2250
10	4900	25	625	5625	350	1750	5250	125	375	1875
$\sum$	50700	306	15550	127096	3749	26655	78705	2080	5866	43445

جدول(3-21)

وهنا وبعد إعداد الجدول (3-21) سنبين مفهوم معنى بعض الرموز المستخدمة وهنا سنعتبر أن X_1 هو المتغير المرتبط والذي نجد قيمته بمعلومية قيم المتغيرات المستقلة الأخرى ونبين أدناه أن المتغيرات وما يقابلها من مفاهيم

المعدل الفصلي X_1

المتغيرات المستقلة

ساعات الدراسة اليومية X_2

أجرة البيت X_3

الدخل الشهري للطالب X_4

وسنبدأ في الصفحات التالية بالمتغيرات X_3, X_2, X_1 وبعد عرض للأفكار الرئيسية في هذا المجال وممارسة العمليات الحسابية وتبيان كيفية استخدام العلاقات الرياضية لهذه الحسابات نقدم المغير الرابع وتعتبر الخطوة الأولى في طريقة الارتباط هو أن نحصل على معادلة تحتوي على متغيرات مستقلة لتقدير المتغير المرتبط وفي مثالنا فان المتغيرات المستقلة التي سنتناولها أولا هي X_2, X_3 لتقدير X_1. وسنرمز لهذا المقدر بالرمز $X_{c1.23}$ ويعني هذا الرمز أن X_1 المقدر والمحسوب أو المعتمد على X_2, X_3 ولانهما متغيرين مستقلين سيكون لدينا b اثنتين وسيكون نوع المعادلة على النحو التالي

$$X_{c1.23} = a_{1.23} + b_{1.23}X_2 + b_{13.2}X_3$$

وكلمة تتعلق بمعنى b وترميزها ضروري وهذه الشبكة من معاملات التقدير نشير إلى التأثير على X_1 عندما يسمح حدوث تغيير على المتغير المستقل المصاحب للمتغير الآخر. لذا فان $b_{12.3}$ هي مقدر الاختلاف في معدل الطالب السنوي مع ساعات الدراسة اليومية وبقاء المتغير الذي يمثل أجرة المنزل ثابتا وبشكل عام ففي الرمز $b_{12.3}$ رقم المتغير الذي يقع على يمين الفاصلة العشرية هو الذي يبقى ثابتا. وكلما قدمنا عوامل اكثر فاكثر فان هذه الحالة المرغوبة تصبح أقرب فاقرب. والثابت $a_{1.23}$ هي القيمة الفرضية لمعدل الطالب السنوي عندما تكون باقي العوامل صفرا.

وعلينا أن نلاحظ عند هذه النقطة أن عالم العلوم الطبيعية غالبا ما يستطيع أن يصمم تجربة لكي يسيطر على مجموعة من المتغيرات على سبيل المثال الحرارة والرطوبة أو ضغط الهواء وكذلك عالم الأحياء والزارعة يستطيعوا السيطرة على متغيراتهم إلى درجة مقبولة. ومن ناحية أخرى فان الاقتصاد وعلم الاجتماع والعلوم الاجتماعية الأخرى وبشكل عام عليهم أن يستخدموا طرق المشاهدة بدلا من طرق التجربة. ولان العاملين في هذه الميادين لديهم السيطرة القليلة وإذا أحدهم تغلب على المادة التي يجب أن يستخدموها عليهم أن يثبتوا

بعض المتغيرات إحصائيا وباستخدام الطرق الفنية التي شرحت سابقا فان مجموع التغيرات (الاختلافات) للسلسلة المعتمدة هي عبارة عن مجموع كميتين
1) الاختلافات في القيم المقدرة لتلك السلسلة عن وسطها الحسابي
2) الاختلافات في القيم الحقيقية لتلك السلسلة عن القيم المقدرة أي

$$\sum x^2{}_1 = \sum x^2{}_{c1.23} + \sum x^2{}_{s1.23}$$

وعليه فان العملية الحسابية لحساب القياسات للعلاقات هي في الأساس نفسها في الارتباط البسيط. والخطأ القياسي في التقدير هو

$$S_{1.23} = \sqrt{\frac{\sum x^2 s1.23}{N}}$$

ومعامل التحديد المضاعف والذي سنرمز له بالرمز R^2

$$R^2{}_{1.23} = \frac{\sum x^2{}_{c1.23}}{\sum x^2{}_1}$$

وينص على انه النسبة بين مجموع التغيرات الموجودة إلى التغيرات المحسوبة أو قيم $X_{c1.23}$ والتي فسرت من قبل المتغيرات المستقلة ومعامل الارتباط المضاعف والذي سنرمز له بالرمز R ويكون ليس له إشارة ومن الجدير بالاهتمام أن تلاحظ في هذه النقطة انه كلما أضيف متغيرات مستقلة مصاحبة للمتغير المرتبط في أي مسالة فان

$$R_{1.23}\ldots\ldots\ldots m \to 1,$$
$$S_{1.23}\ldots\ldots\ldots m \to 0.$$

وعندما تقترب قيمة

$$R_{1.23}\ldots\ldots\ldots m \to 1$$

فأننا نكون قد استطعنا الحصول على تقديرات كاملة للمتغير X_1

3-8-2 : الارتباط الجزئي: إن معامل التحديد الجزئي ما هو إلا النسبة
1) في الزيادة في الاختلاف في القيم المحسوبة للمتغير المرتبط الناتج عن تقديم متغير مستقل إلى الاختلاف الذي لم يفسر قبل تقديم المتغير.

نجد معاملات الارتباط البسيط لمختلف المتغيرات على اعتبار أن أحدها متغيرا مستقلا والآخر متغيرا مرتبطا والذي سبق وان تناولناه بصيغ مختلفة في بداية الفصل الثالث وهي كما يلي :

$$r_{12} = \sqrt{\frac{\sum x^2_{e1.2}}{\sum x^2_1}} = \sqrt{\frac{190.74}{856.4}} = 0.47, r^2_{12} = 0.22$$

$$r_{13} = \sqrt{\frac{\sum x^2_{e1.3}}{\sum x^2_1}} = \sqrt{\frac{27.68}{856.4}} = 0.18, r^2_{13} = 0.0324$$

$$r_{14} = \sqrt{\frac{\sum x^2_{e1.4}}{\sum x^2_1}} = \sqrt{\frac{114.33}{856.4}} = 0.37, r^2_{14} = 0.13$$

$$r_{23} = \sqrt{\frac{\sum x^2_{e2.3}}{\sum x^2_2}} = \sqrt{\frac{0.84}{14.4}} = 0.24, r^2_{23} = 0.06$$

$$r_{24} = \sqrt{\frac{\sum x^2_{e2.4}}{\sum x^2_2}} = \sqrt{\frac{0.03}{14.4}} = 0.05, r^2_{24} = 0.002$$

$$r_{34} = \sqrt{\frac{\sum x^2_{e3.4}}{\sum x^2_3}} = \sqrt{\frac{432.97}{1110}} = 0.62, r^2_{34} = 0.39$$

وبتربيع معاملات الارتباط نحصل على ما يسمى بمعاملات التحديد هذا وسنجد أدناه حسابات أخرى تفيدنا في إيجاد معاملات أخرى على النحو التالي:

$$1 - r^2_{12} = 1 - 0.22 = 0.78, \sqrt{1 - r^2_{12}} = 0.88$$

$$1 - r^2_{13} = 1 - 0.03 = 0.97, \sqrt{1 - r^2_{13}} = 0.98$$

$$1 - r^2_{14} = 1 - 0.13 = 0.87, \sqrt{1 - r^2_{14}} = 0.93$$

$$1 - r^2_{23} = 1 - 0.06 = 0.94, \sqrt{1 - r^2_{23}} = 0.95$$

$$1 - r^2_{24} = 1 - 0.002 = 0.998, \sqrt{1 - r^2_{24}} = 0.999$$

$$1 - r^2_{34} = 1 - 0.39 = 0.61, \sqrt{1 - r^2_{34}} = 0.78$$

وكل معاملات الارتباط ومعاملات التحديد التي حسبت هي معاملات من الرتبة الصفرية

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}r}{\sqrt{1-r^2_{12}}\sqrt{1-r^2_{23}}} = \frac{0.18-(0.47)(0.24)}{(0.88)(0.89)} = \frac{0.18-0.11}{0.78}$$

$$= \frac{0.07}{0.78} = 0.09$$

$$r_{14.2} = \frac{r_{14} - r_{12}r_{24}}{\sqrt{1-r^2_{12}}\sqrt{1-r^2_{24}}} = \frac{0.37-(0.47)(0.05)}{(0.88)(0.999)} = \frac{0.37-0.02}{0.88}$$

$$= \frac{0.35}{0.88} = 0.4$$

$$r_{14.3} = \frac{r_{14} - r_{13}r_{34}}{\sqrt{1-r^2_{13}}\sqrt{1-r^2_{34}}} = \frac{0.37-(0.18)(0.39)}{(0.98)(0.78)} = \frac{0.37-0.07}{0.76}$$

$$= \frac{0.3}{0.76} = 0.39$$

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r^2_{13}}\sqrt{1-r^2_{23}}} = \frac{0.47-(0.18)(0.24)}{(0.98)(0.89)} = \frac{0.47-0.04}{0.87}$$

$$= \frac{0.43}{0.87} = 0.49$$

$$r_{13.4} = \frac{r_{13} - r_{14}r_{34}}{\sqrt{1-r^2_{14}}\sqrt{1-r^2_{34}}} = \frac{0.18-(0.37)(0.62)}{(0.93)(0.78)} = \frac{0.18-0.23}{0.73}$$

$$= \frac{-0.05}{0.73} = -0.07$$

$$r_{12.4} = \frac{r_{12} - r_{14}r_{24}}{\sqrt{1-r^2_{14}}\sqrt{1-r^2_{24}}} = \frac{0.47-(0.37)(0.05)}{(0.93)(0.999)} = \frac{0.47-0.02}{0.93}$$

$$= \frac{0.45}{0.93} = 0.48$$

$$r_{24.3} = \frac{r_{24} - r_{23}r_{34}}{\sqrt{1-r^2_{23}}\sqrt{1-r^2_{34}}} = \frac{0.05-(0.0.24)(0.62)}{(.89)(0.999)} = \frac{0.05-0.15}{0.69}$$

$$= \frac{-0.1}{0.69} = -0.14$$

$$r_{34.2} = \frac{r_{34} - r_{23}r_{24}}{\sqrt{1-r^2_{23}}\sqrt{1-r^2_{24}}} = \frac{0.62-(0.24)(0.05)}{(0.89)(0.999)} = \frac{0.62-0.01}{0.89}$$

$$= \frac{0.61}{0.89} = 0.69$$

ومن المفيد هنا حساب القيم التالية والتي سنستخدمها في العلاقات اللاحقة وهذه القيم هي

$$r^2_{13.2}\,0.01 \rightarrow \sqrt{1-r^2_{13.2}} = 0.99$$

$$r^2_{14.2} = 0.16 \rightarrow \sqrt{1-r^2_{14.2}} = 0.92$$

$$r^2_{14.3} = 0.15 \rightarrow \sqrt{1-r^2_{14.3}} = 0.92$$

$$r^2_{12.3} = 0.24 \rightarrow \sqrt{1-r^2_{12.3}} = 0.87$$

$$r^2_{13.4} = 0.01 \rightarrow \sqrt{1-r^2_{13.4}} = 0.99$$

$$r^2_{12.4} = 0.23 \rightarrow \sqrt{1-r^2_{12.4}} = 0.88$$

$$r^2_{24.3} = 0.2 \rightarrow \sqrt{1-r^2_{24.3}} = 0.89$$

$$r^2_{34.2} = 0.48 \rightarrow \sqrt{1-r^2_{34.2}} = 0.72$$

$$r^2_{23.4} = 0.07 \rightarrow \sqrt{1-r^2_{23.4}} = 0.96$$

معاملات الارتباط الجزئي من الرتبة الثانية

نعني بمعامل الارتباط الجزئي من الرتبة الثانية هو أيجاد معامل الارتباط بين المتغير المرتبط ومتغير مستقل آخر مع ثبوت المتغيرين الآخرين.
من الممكن الحصول على معاملات الارتباط الجزئي من الرتبة الثانية من معاملات الرتبة الأولى وسنقصر حساباتنا للمعاملات الجزئية من الرتبة الثانية التي تأخذ X_1 هو المتغير المرتبط وهذه المعاملات هي

$$r_{14.23} = \frac{r_{14.2} - r_{13.2}r_{34.2}}{\sqrt{1-r^2_{13.2}}\sqrt{1-r_{34.2}}} = \frac{0.4-(0.4)(0.69)}{(0.99)(0.72)} = \frac{0.34}{0.71} = 0.48$$

$$r_{13.24} = \frac{r_{13.2} - r_{14.2}r_{34.2}}{\sqrt{1-r^2_{14.2}}\sqrt{1-r^2_{34.2}}} = \frac{0.09-(0.4)(0.69)}{(0.92)(0.72)} = \frac{0.09-0.28}{0.66}$$

$$= \frac{-0.19}{0.66} = -.29$$

$$r_{12.34} = \frac{r_{12.3} - r_{14.3}r_{24.3}}{\sqrt{1-r^2_{14.3}}\sqrt{1-r^2_{24.3}}} = \frac{0.49-(0.39)(0.14)}{(0.92)(0.89)} = \frac{0.49-0.05}{0.82}$$

$$= \frac{0.44}{0.82} = 0.54$$

وبشكل عام فانه لعدد m من المتغيرات

$$r_{1m.23.........(m-1)} = \frac{r_{1m.23..............(m-2)} - r_{1(m-1).23.........(m-2)} r_{m(m-1).23......(m-2)}}{\sqrt{1 - r^2_{1(m-1).23..........(m-2)}} \sqrt{1 - r^2_{m(m-1).23........(m-2)}}}$$

معاملات الارتباط المتضاعف

يمكن الحصول على معامل الارتباط المتضاعف لثلاثة متغيرات اولا من معمل الارتباط من الرتبة الصفرية على النحو التالي

$$R^2_{1.23} = \frac{r^2_{12} + r^2_{13} - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r^2_{23}} = \frac{(0.22) + (0.03) - 2(0.47)(0.18)(0.24)}{0.76}$$

$$= \frac{0.25 - 0.04}{0.76} = \frac{0.21}{0.76} = 0.28$$

$$R_{1.23} = \sqrt{R^2_{1.23}} = 0.53$$

$$R^2_{1.24} = \frac{r^2_{12} + r^2_{14} - 2r_{12}r_{14}r_{24}}{1 - r^2_{24}} = \frac{022) + (0.13) - 2(0.47)(0.37)(0.05)}{0.998}$$

$$= \frac{0.35 - 0.02}{0.998} = \frac{0.33}{0.998} = 0.33$$

$$R = \sqrt{R^2_{1.24}} = 0.58$$

$$R^2_{1.34} = \frac{r^2_{13} + r^2_{14} - 2r_{13}r_{14}r_{34}}{1 - r^2_{34}} = \frac{(0.03) + (0.13) - 2(0.18)(0.37)(0.62)}{0.61}$$

$$= \frac{0.16 - 0.08}{0.61} = \frac{0.08}{0.61} = 0.13$$

$$R_{1.34} = \sqrt{R^2_{1.34}} = 0.36$$

$$R^2_{1.234} = r^2_{12} + r^2_{13.2}(1 - r^2_{12}) + r^2_{14.23}(1 - R^2_{1.23})$$

$$= 0.22 + 0.01(0.88) + 0.23(0.77)$$

$$= 0.22 + 0.01 + 0.18 = 0.41$$

$$R_{1.234} = \sqrt{R^2_{1.234}} = \sqrt{0.14} = 0.64$$

ويمكن وضع هذه العلاقة بصيغتها العامة لـm متغير على النحو

$$R^2_{1.234.......m} = 1 - \left[(1 - r^2_{12})(1 - r^2_{14.23}).........(1 - r^2_{1m.23.........}(m-1)\right]$$

تمارين عامة على الفصل الثالث

1)البيانات التالية تمثل أرقام المشاهدات x,y كما في الجدول التالي:

x	2	5	7	10	12	13	15
y	4	10	14	20	24	26	30

والمطلوب إيجاد نوع الارتباط بين المتغيرين مع ذكر نوعه ووصفه.

2) أوجد معامل ارتباط بيرسون لقيم المشاهدات المبوبة في الجدول التالي

x	14	8	10	12	14	16
y	12	8	7	5	3	1

3) من البيانات المرتبة بالجدول.

x	6	8	10	12	14	2
y	2	3	4	5	6	1

والمطلوب 1) إيجاد معامل ارتباط بيرسون 2)إيجاد معامل ارتباط سبيرمان للرتب

4)البيانات التالية تمثل خمسة اسر في بلد ما وفيها عدد أفراد الأسرة ودخل الأسرة واجرة السكن إضافة إلى مصروفات الأكل والشرب.

الرقم	عدد أفراد الأسرة	أجرة السكن	مصروفات الأكل والملبس	دخل الأسرة
1	3	120	180	400
2	5	70	120	210
3	7	100	150	300
4	2	80	40	250
5	3	90	150	280
6	9	110	200	430
7	5	150	200	500
8	6	70	100	180
9	4	80	115	200
10	7	60	120	185

المطلوب: 1)إيجاد معاملات الارتباط البسيط بين كافة المتغيرات.

2)إيجاد معاملات الارتباط الجزئي من الرتبة الأولى على اعتبار أن عدد أفراد الأسرة هو المتغير المرتبط والتعليق عليها.

3) إيجاد معاملات الارتباط الجزئي من الرتبة الثانية بين مختلف المتغيرات.

4)إيجاد الارتباط المتضاعف بين مختلف المتغيرات.

4) من البيانات المعطاة

$$\sum xy = 85, \sum x = 20, \sum y = 30, n = 5, \sum x^2 = 165, \sum y^2 = 200$$

اوجد معامل الارتباط للمتغيرين بطريقة بيرسون.

5) من البيانات التالية اوجد معامل ارتباط سبيرمان للرتب اذا كانت مبينة كما يلي.

$$\sum d^2 = 55.5, n = 6$$

س6: في مايلي علامات مجموعة مؤلفة من 5 طلاب في امتحاني الرياضيات والاحصاء x,y على التوالي.

x	86	68	74	80	62
y	80	65	75	75	65

المطلوب

1) حساب معامل ارتباط بيرسون 2) معامل ارتباط سبيرمان.

3) معادلة الانحدار y=ax+b 4) اذا علم ان احد الطلبة قد حصل علامة (78) في الرياضيات اوجد علامة الطالب في الاحصاء.

5) ايجاد قيمة الرياضيات اذا كانت علامته في الاحصاء هي 60.

6) ارسم شكل الانتشار بناءً على المشاهدات

7) ارسم خط الانحدار

8) تفسير معاملي a,b.

الفصل الرابع
نظرية الاحتمالات

الفصل الرابع
نظرية الاحتمالات

4-1 : الحادث العشوائي وتعاريف الاحتمالات المختلفة :

إن الاحتمالات تتعلق بالأحداث العشوائية والأحداث غير القطعية ولتحقيق أحداث الصدفة وغير القطعية فإنها تخضع للصدفة ومثال على ذلك عند رمي حجر النرد أو قطعة النقود فإننا نكون على علم بهم بأي عدد أو أي وجهة علوي سيظهر عند إجراء التجربة.

وفي بعض الأحداث فإننا نربط الصدفة بعدد معين ومثال على ذلك عند رمي قطعة نقود فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة متساو ويساوي $\frac{1}{2}$ وهذا ما نسيمه باحتمال ظهور صورة أو كتابة = $\frac{1}{2}$ وسنعبر عن هذا الاحتمال بطريقة رمزية على النحو $\frac{1}{2}$ = (صورة) P والآن لنعطي تعريفات مختلفة للاحتمالات.

التكرار المشاهد :

في أية تجربة وتحت نفس الشروط إذا أجريت التجربة n مرة وكان عدد مرات ظهور حادث معين هو m مرة فإن احتمال هذا الحادث هو

$$P(A) = \lim_{n \to 0} \frac{m}{n} ....(4-1)$$

وهذا الاحتمال يسمى الاحتمال التجريبي.

أما التعريف الكلاسيكي للاحتمال هو

تعريف (4-1): في أي تجربة إذا كان عدد النتائج المتوقعة N نتيجة وكان عدد عناصر الحادث A هو M نتيجة فإن احتمال الحادثة P(A) هو

$$P(A) = \frac{M}{N} ....(4-2)$$

أو بصيغة كلامية

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني للتجربة}}$$

4-2 : الفضاء العيني للتجربة :

تعريف(4-2): الفضاء العيني هو مجموعة جميع النتائج المتوقعة لهذه التجربة.

تعريف (4-3): في أي تجربة إذا كانت فرضية ظهور جميع عناصر الفضاء العيني متساوية فإن احتمال ظهور كل عنصر يكون متساو وفي هذه حالة نسمى الاحتمال من هذا النوع بالاحتمال المنتظم.

وأمثلة على الاحتمال المنتظم هو احتمال ظهور أي وجه من واجهة قطعة النقود. أو حجر النرد عند إلقاءه مرة واحدة.

فإذا كان الحدث A يمثل جميع النتائج المتوقعة من إجراء التجربة فإن

$$P(A) = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}3)$$

وتسمى مثل هذه الأحداث بالحدث التام أو الحدث القطعي.

أما إذا كان الحدث لا يمثل أي عنصر من النتائج المتوقعة لهذه التجربة فإن احتمال

$$P(A) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}4)$$

ونقول لمثل هذه الأحداث بالحدث المستحيل وبتوحيد العلاقة (3-3) مع العلاقة (4-3) نصل إلى العلاقة التالية :

$$0 \le P(A) \le 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}4)$$

4-2-1 : الفضاء العيني المنتهي :

تعريف (4-4): يقال للفضاء العيني الذي عدد عناصره منتهية بالفضاء العيني المنتهي والذي يمكن كتابته على الشكل $S = \{S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n\}$ وسنرمز لاحتمال كل عنصر من عناصر الفضاء العيني S_i بالرمز P_i وبحيث أن :

a) لكل P_i فإن $0 \le P_i \le 1$

b) $P_1 + P_2 + \ldots\ldots\ldots + P_n = 1$

أما إذا كانت فرصة وقوع كل عنصر متساوية في الظهور فإن :

$$P_1 = P_2 = \ldots\ldots\ldots = P_n = 1/n$$

وكما هو الحال في الفضاء العيني المنتهي فإن لكل عنصر S_i يقابله احتمال P_i ويحقق الشروط التالية :

$0 \le P_i \le 1$ (a $\qquad$ $P_1 + P_2 + \dots\dots\dots = \sum P_i = 1$ (b

مثال (4-1) : فصل به 10 طالبات، 6 طلاب يراد تشكيل لجنة من خمسة أشخاص والمطلوب إيجاد عدد عناصر الفضاء العيني الذي يشكل هذا الفضاء واحتمال كل عنصر

الحل : عدد عناصر الفضاء العيني هو = $\binom{16}{5}$

$$\binom{16}{5} = \frac{16!}{(16-5)!5!} = 4368$$

وبما أن فرصة الوقوع متساوية فإن الاحتمال $P = \dfrac{1}{4368}$

4-2-2 : الفضاء العيني غير المنتهي :

تعريف(4-6): إذا كانت عناصر الفضاء العيني هي نقاط على خط مستقيم أو نقاط في مستوى أو غير ذلك فنقول لمثل هذا الفضاء العيني بغير المنتهي.

4-3 : الأحداث وفضاء الأحداث :

تعريف (4-7): الحدث هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني S فإذا كان الحدث A من S فيكتب على الصورة $A \subset S$.

وسنستعين بأشكال فن لتوضيح مفهوم الحدث والحدث المتمم $\overline{A}$ كما في شكل (4-1) والمنطقة المظللة تشير إلى المطلوب. S

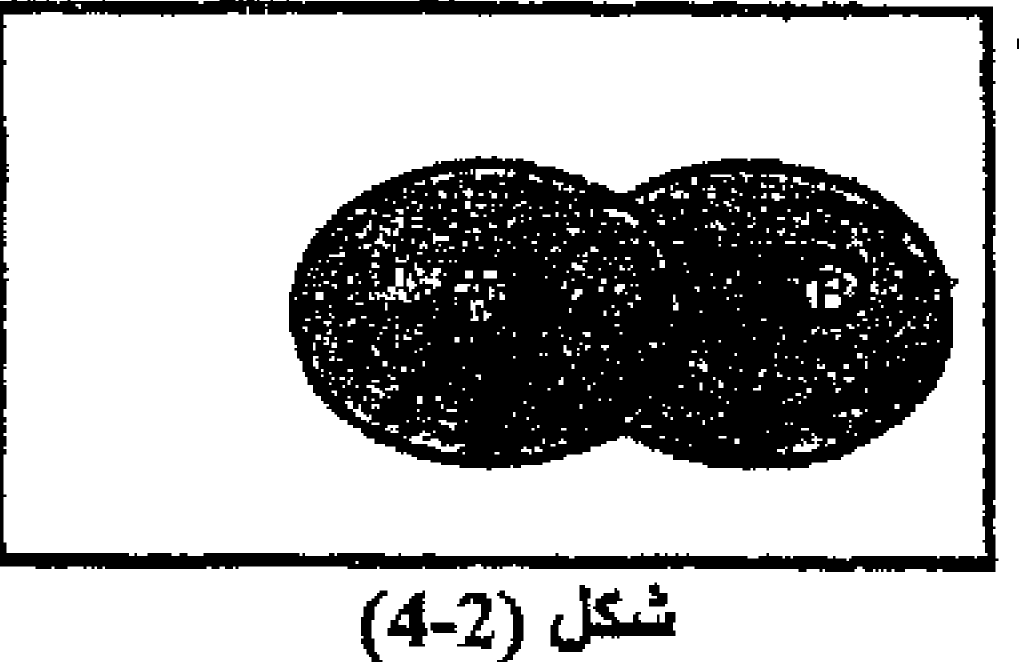
A

$\overline{A}$

شكل (4-1)

حيث أن شكل (4-1) يمثل قيمة A.

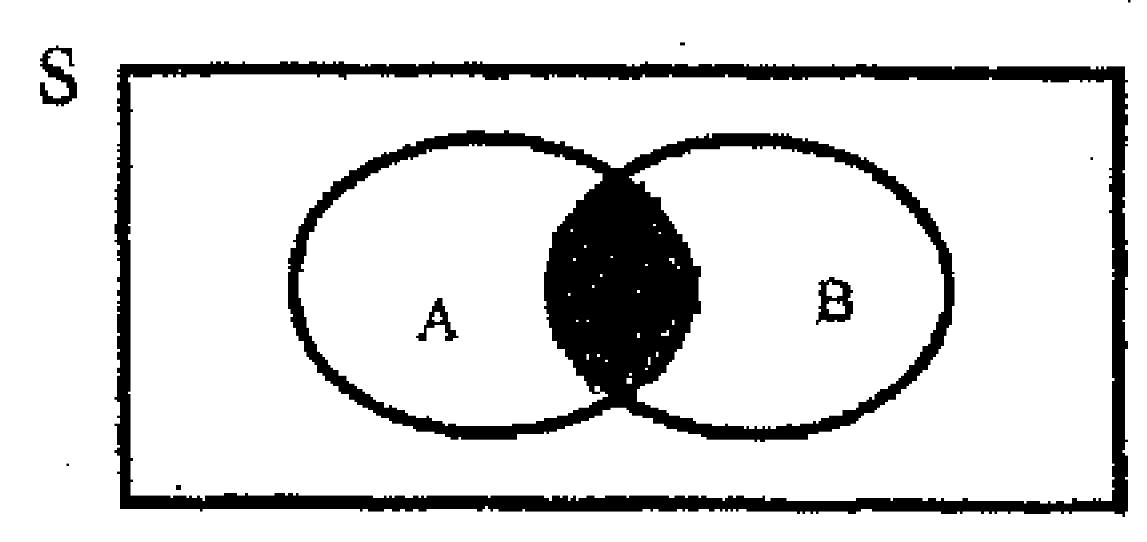
وإذا كان لدينا حدث مكون من عناصر حدثين كما هو واضح في شكل (4-2) في رمز الاتحاد.



شكل (4-2) $A\cup B$

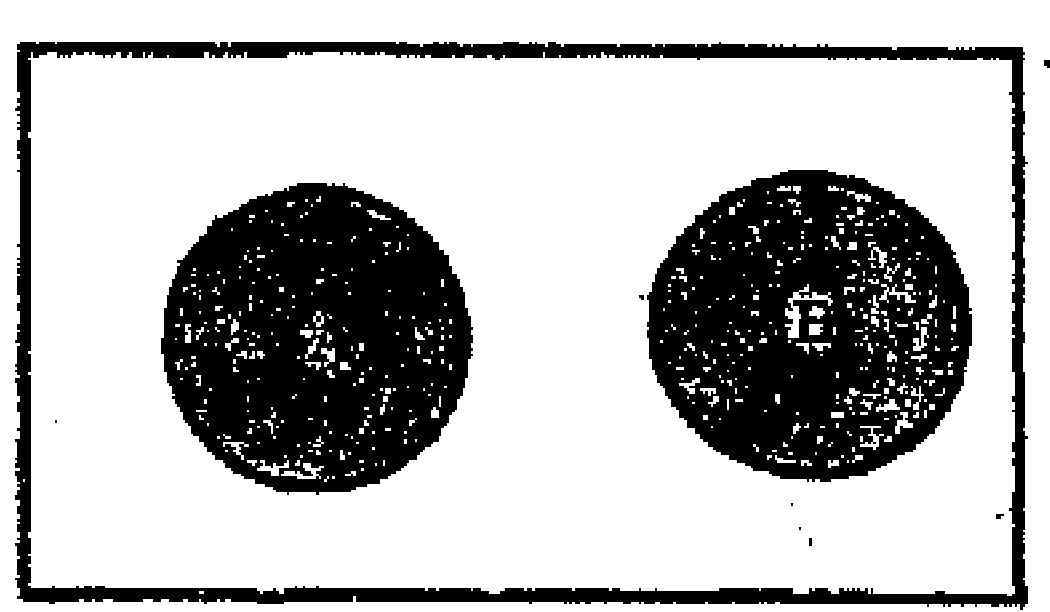
والمنطقة المظللة تمثل المطلوب.

أو قد يكون الحدث ممثلا للعناصر المشتركة بين الحدثين اسم التقاطع كما هو واضح في شكل (4-3). حيث أن المنطقة المظللة تمثل المطلوب.



شكل (4-3) $A\cap B$

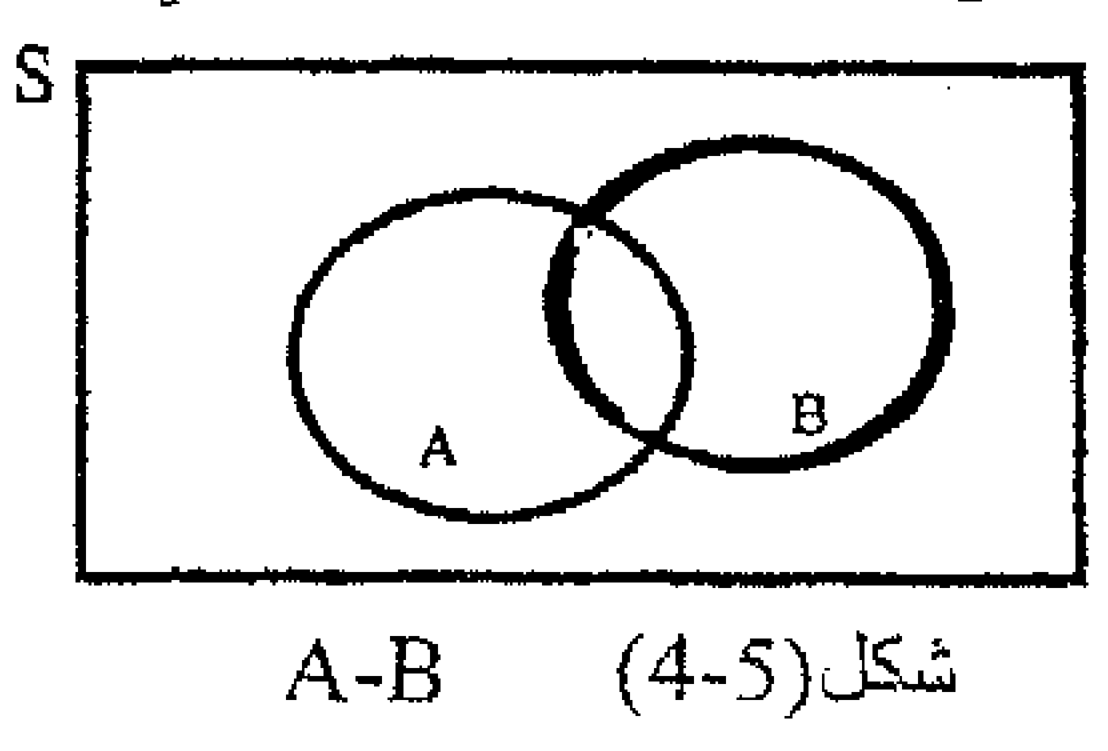
وقد يكون لدينا حدث ممثل لعناصر حدثين متباعدين كما هو واضح في شكل(4-4).
والمنطقة المظللة تمثل المطلوب.



A,B

شكل (4-4) حدثان منفصلان

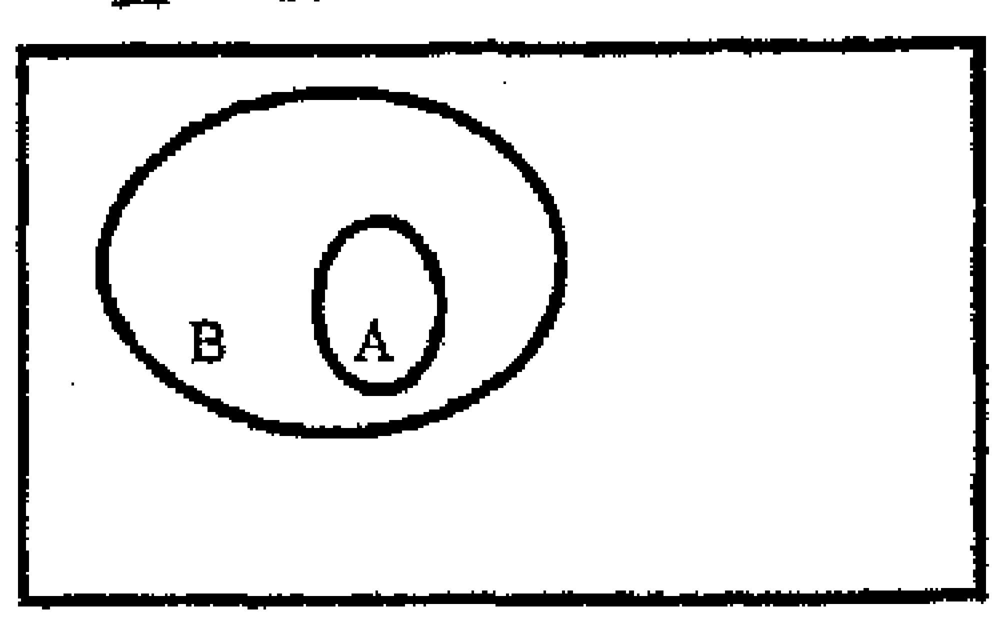
وقد يكون الحدث مكون من الفرق بين الحدثين كما هو مبين في شكل(4-5)



شكل(4-5) A-B

حيث المنطقة غير المظللة تمثل المطلوب وهو B-A.

أما إذا كان A هو جزء من حادث آخر B فإن $A \subseteq B$ كما هو واضح في شكل (4-6).



شكل (4-6) $A \subseteq B$

4-4 : تعاريف هامة :

إذا كان الحدث A فإن احتمال هذا الحدث يمثل $P(A)$ وأن

a) $0 \leq P(A) \leq 1$

b) $P(S) = 1$

c) إذا كان A, B حدثان منفصلان فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

d) إذا كان $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ أحداث منفصلة فإن

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots P(A_n)$$

4-5 : النظريات المتعلقة بالاحتمالات :

نظرية (4-1) : إذا كان Φ حدث مستحيل فإن $P(\Phi) = 0$.

الإثبات نعلم أن $\Phi \bigcup \Phi = \Phi, \Phi \bigcap \Phi = \Phi$

وعليه فإن $P(\Phi \bigcup \Phi) = P(\Phi) + P(\Phi) = P(\Phi)$

$$\Rightarrow P(\Phi) + P(\Phi) - P(\Phi) = 0 \Rightarrow P(\Phi) = 0$$

وهو المطلوب.

نظرية (4-2) : لأي حدث A فإن $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

الإثبات : نعلم أن الحدث A ومتممه $\overline{A}$ حدثان منفصلان أي أن

وأن $A \cap \overline{A} = \Phi \ , \ A \cup \overline{A} = S$

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(S) = 1$$

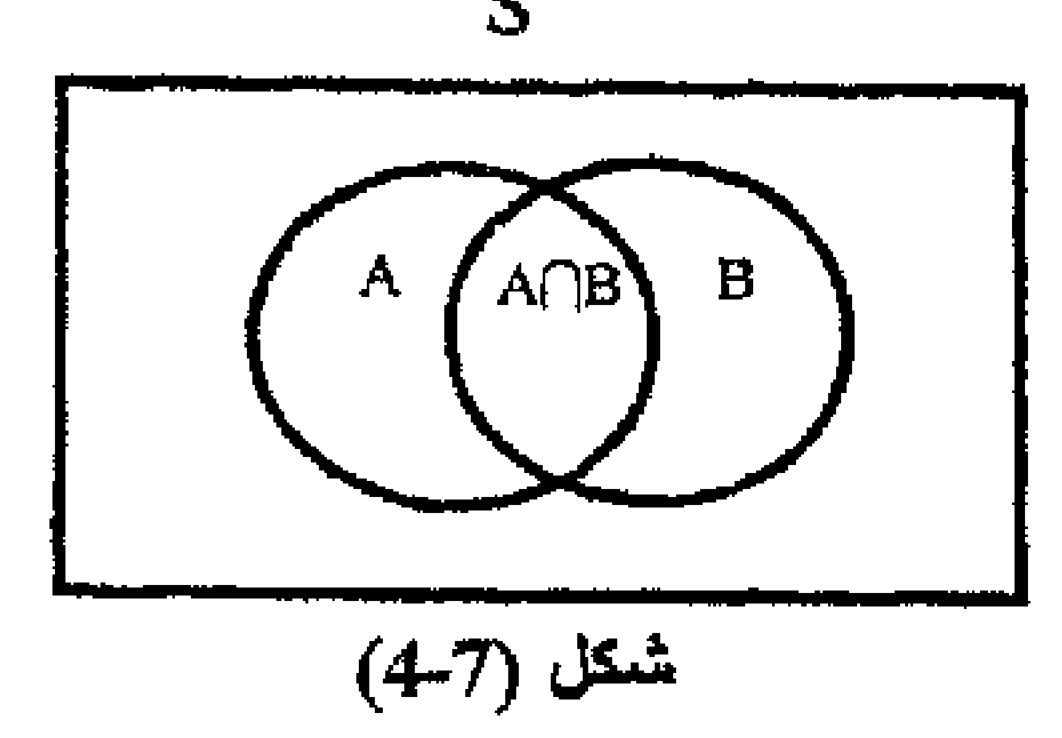
إذن $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

وهو المطلوب.

نظرية (4-3) : ليكن الحدثان A,B حدثان غير منفصلان أي $A \cap B \neq \Phi$ فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الإثبات : لإثبات هذه النظرية سوف تستعين بشكل فن (4-7).



شكل (4-7)

نكتب من شكل فن العلاقات التالية :

$$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B) \ , \ B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$

ونلاحظ أيضا أن الحدثان $A, \overline{A} \cap B$ حدثان منفصلان كذلك $A \cap B$ ، $\overline{A} \cap B$ حدثان منفصلان أيضا وعليه فإ ن

$$P(A \cup B) = P[A \cup (\overline{A} \cap B)] = P(A) + P(\overline{A} \cap B) \ .... \ (4\text{-}5)$$

كذلك $P(B) = P[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)] \ ...... \ (4\text{-}6)$

وعليه فإن $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

وإذا عوضنا عن هذه العلاقة في العلاقة (4-5) فإننا نجد أن

وهو المطلوب $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ويمكن تعميم نظرية (4-6) على النحو التالي :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + ...$$

$$(-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n)$$

$$P(A\bigcup B)=P[A\bigcup(\overline{A}\bigcap B)]=P(A)+P(\overline{A}\bigcap B)\ ....\ (4\text{-}5)$$

كذلك (4-6) ...... $P(B)=P[(A\bigcap B)\bigcup(\overline{A}\bigcap B)=P(A\bigcap B)+P(\overline{A}\bigcap B)]$

وعليه فإن $P(\overline{A}\bigcap B)=P(B)-P(A\bigcap B)$

وإذا عوضنا عن هذه العلاقة في العلاقة (4-5) فإننا نجد أن

وهو المطلوب $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$

ويمكن تعميم نظرية (4-6) على النحو التالي :

$$P(A_1\bigcup A_2\bigcup........\bigcup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}^{n}P(A_i\bigcap A_j)+.........$$

$$(-1)^{n-1}P(A_1\bigcap A_2\bigcap........\bigcap A_n)$$

نظرية (4-4) : إذا كان لدينا الحدثان A, B فإن احتمال الحدث A-B هو $P(A-B)=P(A\bigcap\overline{B})=P(A)-P(A\bigcap B)$.

الاثبات : نعلم أن $B;\overline{B}$ حدثان منفصلان ، $A\bigcap B$, $A\bigcap\overline{B}$ حدثان منفصلان أيضا وعليه فإن

$$A=A\bigcap S=A\bigcap(B\bigcup\overline{B})=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap\overline{B}),$$

وكذلك

$$P(A)=P(A\bigcap B)+P(A\bigcap\overline{B})\Rightarrow P(A)=P(A\bigcap B)+P(A-B)$$

$$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)$$

وهو المطلوب.

نظرية (4-5) : إذا كان A, B حدثين من الفضاء العيني وكـان $A\subseteq B$ فإن $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

الاثبات : إذا كان $B\subseteq A$ فإن $A\bigcap B=B$

$$\Rightarrow P(A\bigcap B)=P(B)$$

وبالتعويض عن $P(A\bigcap B)$ في العلاقة

$$P(A-B) = P(A) - P\left(A\bigcap B\right) \Rightarrow P(A-B) = P(A) - P(B)$$

وهو المطلوب.

نظرية (4-6) : إذا كان $B \subseteq A$ فإن $P(B) \leq P(A)$

الاثبات : حسب النظرية $P(A-B) = P(A) - P(B)$ ونعلم أن احتمال أي حدث هو أكبر من أو يساوي الصفر وعليه فإن :

$$P(A) - P(B) \geq 0 \Rightarrow P(A) \geq P(B) \Rightarrow P(B) \leq P(A)$$

وهو المطلوب.

مثال (4-3) : في تجربة إلقاء قطعتين نقود متمايزتين إذا كان الحدث A يمثل ظهور صورة واحدة على الأقل والحدث B يمثل ظهور صورتين فقط بينما الحادث C يمثل ظهور كتابتين فقط والمطلوب.

a) هل الحادثين A , B منفصلين ؟
b) هل الحادثين C , A منفصلين ؟
c) احتمال ظهور A أو B ؟
d) احتمال ظهور B أو C ؟

الحل : إن الفضاء العيني لهذه التجربة $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

وأن $P(HH) = P(HT) = P(TH) = P(TT) = \frac{1}{4}$

a) الاحداث $C = \{TT\}, B = \{HH\}, A = \{HH, HT, TH\}$, A,B ليسا منفصلين. $A\bigcap B = \{HH\} \neq \Phi$. لأن تقاطعهما لا يساوي Φ.

b) $A\bigcap C = \Phi$ فالحدثان C، A منفصلان لأن تقاطعهما Φ.

c)
$$P\left(A\bigcup B\right) = P(A) + P(B) - P\left(A\bigcap B\right)$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

d) $B\bigcap C = \Phi \Rightarrow P\left(B\bigcup C\right) = P(B) + P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

مثال (4-4) : صف به 20 طالبة وثلاثون طالبا خمسة عشر طالبة وعشرون طالبا شعرهم أسود فإذا اختير من هذا الفصل شخصا بطريقة عشوائية فيما احتمال أن يكون الشخص المختار هو طالبة والشعر أسود.

الحل : ليكن الحدث { أن يكون الشخص المختار طالبة} = A والحدث {أن يكون الشخص المختار شعره أسود} = B.

و عليه يكون $P(A)=\frac{20}{50}$, $P(B)=\frac{35}{50}$, $P(A\bigcap B)=\frac{15}{50}$

ويكون الاحتمال المطلوب $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$

$$=\frac{20}{50}+\frac{35}{50}-\frac{15}{50}=\frac{20+35-15}{50}=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$$

مثال (4-5) : للحدثين A, B إذا كان $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{2}{5}, P(A\bigcap B)=\frac{1}{4}$ والمطلوب إيجاده.

$$a)P(A\bigcup B),\quad b)P(\overline{A}),\quad c)P(\overline{A}\bigcup B)\quad d)P(A\bigcap \overline{B})$$

الحل : (a $\quad P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{20+24-15}{60}=\frac{29}{60}$$

(b $\quad P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(c $\quad P(\overline{A}\bigcup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\bigcap B)$

$$=P(\overline{A})+P(B)-\left[P(B)-P(A\bigcap B)\right]$$

$$=P(\overline{A})+P(A\bigcap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$$

4-6 : الحدث التام (الأكيد) :

ليكن $A_1, A_2, ..., A_n$ احداث منفصلة يعني $A_i\bigcap A_j$ ، $i \neq j$ وإذا كان الفضاء العيني S مكون من اتحاد هذه الاحداث

$$P(A_1 \cup A_2 .... \cup .... \cup A_n) = P(A_2) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$
$$= P(S) = 1 \quad .... (4\text{-}7)$$

والعلاقة (4-7) تسمى بالنتائج القطعية.

4-7 : الاحتمال الشرطي :

تعريف(4-8) : يقال لاحتمال الحدث A إذا علم وقوع الحدث B بالحدث المشروط ويرمز له بالرمز $P(A/B)$ والآن نتناول العلاقات التالية والنظريات التي تتعلق بهذا المفهوم ....

$$P(A/B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}, P(B)\neq 0 \quad .... \quad (4-8)$$

وبما أن $A\bigcap B = B\bigcap A$ ولإيجاد احتمال وقوع B إذا علم وقوع A نجده من العلاقة التالية

$$P(B/A)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}\neq 0 \quad .... \quad (4-9)$$

ومن العلاقتين (3-8)، (3-9) نستطيع كتابة العلاقة التالية :

$$P(A\bigcap B)=P(A/B).P(B)=P(B/A).P(A) \quad .... \quad (4-10)$$

ويمكن تعميم العلاقة (3-10) للأحداث غير المنفصلة $A_1, A_2, ..., A_n$ لتصبح العلاقة على الصورة

$$P(A_1\bigcap A_2\bigcap ....\bigcap A_n)=P(A_n/A_1\bigcap A_2\bigcap A_3....\bigcap A_{n-1})P(A_1\bigcap A_2....\bigcap A_{n-1})$$

$$=P(A_n/A_1\bigcap A_2\bigcap ...\bigcap A_{n-1})P(A_{n-1}/A_1\bigcap A_2\bigcap ...\bigcap A_{n-2})....$$

$$.....P(A_2/A_1).P(A_1)$$

مثال (4-6) : إذا كان $P(A)=\frac{1}{3}, P(A\bigcap B)=\frac{1}{4}$ أوجد $P(B/A)$

الحل : من العلاقة $P(B/A)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

نظرية (4-8) : إن احتمال $P(A/S)=P(A)$

الإثبات : نعلم من العلاقة (3-8) أن

$$P(A/S)=\frac{P(A\bigcap S)}{P(S)}=\frac{P(A)}{1}=p(A)$$

وهو المطلوب.

نظرية (4-9) : إذا كان $P(A) \neq 0,\ P(B) \neq 0,\ A \bigcap B = \phi$ فإن $P(B/A)=0,\ P(A/B)=0$

الاثبات : لأن $A \bigcap B = \phi \Rightarrow P(A \bigcap B) = 0$

ولأن $P(A / B) = \frac{P(A / B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$

وكذلك $P(B / A) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$

وهو المطلوب.

نظرية (4-10) : إذا كان $A \subseteq B,\ P(B) \neq 0$ فإن $P(A / B) = \frac{P(A)}{P(B)}$

الاثبات : بما أن $A \subseteq B \Rightarrow A \bigcap B = A$

وعليه فإن $P(A \bigcap B) = P(A)$

ولأن $P(A \bigcap B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$

وهو المطلوب.

نظرية (4-11) : إذا كان $B \subset A$ ، $P(B) \neq 0$ فإن $P(A / B) = 1$

الاثبات : نعلم أن $P(A \bigcap B) = P(B)$ عندما تكون $B \subset A$

ومن العلاقة $P(A / B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

وهو المطلوب.

نظرية (4-12) : إذا كان $A \bigcap B = \phi,\ P(A) \neq 0$ أو $P(B) \neq 0$

فإن $P\left[A / (A \bigcup B)\right] = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$

الاثبات : من تعريف الاحتمال الشرطي فإن

$$P\left[A / (A \bigcup B)\right] = \frac{P\left[A \bigcap (A \bigcup B)\right]}{P(A \bigcup B)}$$

ومن خاصية توزيع التقاطع على التحاد وكذلك لأن الحادثين منفصلين فإن

$$P[A/(A\bigcup B)] = \frac{P[(A\bigcap A)\bigcup(A\bigcap B)]}{P(A)+P(B)}$$

$$= \frac{P(A)+P(A\bigcap B)}{P(A)+P(B)} = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$

وبالتعويض عن $P(A\bigcap B)$ ويتم المطلوب.

نظرية (4-13) : إذا كان $P(A)\neq 0\ ,\ B_1\bigcap B_2=\phi$ فإن

$$P[(B_1\bigcup B_2)/A] = P(B_1/A)+P(B_2/A)$$

الإثبات : لأن $B_1\bigcap B_2=\phi$ فإن الحدثين $B_1\bigcap A\ ,\ B_2\bigcap A$ احداث منفصلة وعليه فإن :

$$P[(B_1\bigcup B_2)/A] = \frac{P[(B_1\bigcup B_2)\bigcap A]}{P(A)}$$

$$= \frac{P[(B_1\bigcap A)\bigcup(B_2\bigcap A)]}{P(A)}$$

$$= \frac{P[(B_1\bigcap A)+P(B_2\bigcap A)]}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_1\bigcap A)}{P(A)} + \frac{P(B_2\bigcap A)}{P(A)}$$

$$= P(B_1/A)+P(B_2/A)$$

وهو المطلوب.

4-8: الاحداث المستقلة :

تعريف(4-9) : الأحداث المستقلة هي الأحداث التي لاحتمالات وقوعها لا ترتبط مع بضعها البعض.

وهذا الموضوع يأخذ جانبا مهما في نظرية الاحتمالات فمثلا في تجربة القاء قطعة نقود مرتين فظهور صورة في المرة الأولى لا يوجب ظهور صورة في المرة الثانية وهذا هو مفهوم الاستقلال.

وهنا وحتى نتعرف على أن الحدثين مستقلين فإنه يشترط أن يكون

$$P(A\bigcap B) = P(A).P(B) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}11)$$

وهنا يجب الانتباه وعدم الخلط بين الحادثين المنفصلين والحادثين المستقلين.

مثال (4-7) : في تجربة القاء ثلاثة قطع نقود معا إذا كان الحادث
{ظهور صورة واحدة على الأكثر} =A، {ظهور كتابتين فقط} = B فهل الحدثان A,B مستقلان.

الحل : نجد احتمالات الحدثين A, B فإن {TTH ، THT ، HTT ، TTT}= A

$$P(A) = \frac{4}{8}$$

B={ TTH ، THT ، TTH

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

$$A \cap B = \{HTT, THT, TTH\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

وعليه فإن

$$P(A).P(B) \overset{?}{=} P(A \cap B)$$

$$\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{8} \overset{?}{=} \frac{3}{8}$$

$$\frac{12}{64} \neq \frac{3}{8}$$

وعليه فإن الحادثين غير مستقلين.
ونستطيع تعميم العلاقة (3-11) وحتى تكون الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مستقلة يتطلب

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2) \ldots P(A_n) \ldots\ldots (3-12)$$

وكذلك

$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(\overline{A}_1).P(A_2) \ldots P(A_n)$$

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \ldots \cap \overline{A}_n) = P(\overline{A}_1).P(\overline{A}_2) \ldots P(\overline{A}_n)$$

نظرية (4-14) : إذا كان A, B حدثان مستقلان وكان $P(B) \neq 0, P(A) \neq 0$
فإن هذين الحادثين لهما نقاط مشتركة.
الإثبات: بما أن A, B حادثين مستقلين فإنه يمكن كتابة $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

وبما أن $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ وعليه فإن $P(A \cap B) \neq 0$ أيضا أي أن $A \cap B \neq \Phi$ أي أن هناك نقاط مشتركة بينهما وهو المطلوب.

نظرية (4-15) : إذا كان الحادثان A, B حادثين مستقلين فإن.

a) $A.\overline{B}$ حادثين مستقلين
b) $\overline{A}, B$ حادثين مستقلين.
c) $\overline{A}.\overline{B}$ حادثين مستقلين أيضا.

الإثبات : نعلم أن

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A).P(B)$$
$$= [1 - P(A)]P.(B) = P(\overline{A}).P(B)$$

وهو المطلوب أولا.

b) نعلم أن
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) - P(A).P(B)$$
$$= [1 - P(B)]P(A)$$
$$= P(\overline{B}).P(A).$$

وهو المطلوب ثانيا.

C) نعلم أن
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B)$$
$$= P(\overline{A}) - P(\overline{A}).P(B)$$
$$= P(\overline{A})[1 - P(B)]$$
$$= P(\overline{A}).P(\overline{B}).$$

الاستقلال التام :

تعريف(10- 4) : يقال للأحداث A_1, A_2, A_3 بأنها مستقلة تماما إذا تحققت الشروط التالية :

1) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)$

2) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2)$

3) $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1).P(A_3)$

4) $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2).P(A_2)$

مثال (4-8) : ألقيت ثلاث قطع نقود معا فإذا كانت الأحداث التالية معرفة على النحو التالي :

$A = \{HTH ، HHH ،TTH ،TTT\}$

$B = \{ HHT ،THH ،TTH ،TTT \}$

$C = \{ HTT،HHT ،HTH،TTT\}$

فهل الأحداث الثلاث A, B, C أحداث مستقلة بشكل تام.

الحل : $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2}$

$$P(A\bigcap B) = P\{ TTT ، TTH \} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \overset{?}{=} P(A).P(B)$$

أي أن الشرط الأول قد تحقق $P(A\bigcap B) = \frac{1}{4} = P(A).P(B)$

$$P(A\bigcap C) = P\{ TTT، HTH \} = \frac{1}{4} \overset{?}{=} P(A).P(C)$$

أي أن الشرط الثاني قد تحقق $P(A\bigcap C) = \frac{1}{4} = P(A).P(C)$

$$P(B\bigcap C) = P\{ TTT ، HHT \} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \overset{?}{=} P(B).P(C)$$

أي أن الشرط الثالث قد تحقق $P(B\bigcap C) = \frac{1}{4} = P(B).P(C)$

$$A\bigcap B\bigcap C = \{TTT\} \Rightarrow P(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(A\bigcap B\bigcap C) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(A).P(B).P(C)$$

أي أن الشرط الرابع تحقق ولتحقق الشروط الأربعة السابقة فإن الأحداث الثلاثة السابقة أحداث تامة.

4-9: احتمالات النتائج المتوقعة للفضاء العيني :

إذا كانت كل نتيجة من نتائج الفضاء العيني مكونة من أحداث مستقلة فإننا نستطيع حساب احتمال كل نتيجة.

مثال (4-9) : كيس به 5 كرات حمراء، 10 بيضاء فإذا كان السحب دون الإرجاع وسحبنا ثلاث كرات اكتب الفضاء العيني لنتائج التجربة كذلك احتمال كل نتيجة.

الحل : نكتب الفضاء العيني للتجربة وعلى فرض أن الكرة البيضاء رمزنا لها بالرمز W وللحمراء بالرمز R: فإن

$$S = \{WWW ،WRW ،WWR ،WRR ،RRR ،RWR ،RRW ،RWW\}$$

كذلك فإن اللون في السحبة الأولى أو الثانية أو الثالثة جميعها مستقلة وعليه يمكن حساب الاحتمالات لكل نتيجة على النحو التالي :

$$P(RWW) = \frac{5}{15}.\frac{10}{14}.\frac{9}{13} \quad , \quad P(RRW) = \frac{10}{15}.\frac{5}{14}.\frac{4}{13}$$

$$P(RRW) = \frac{5}{15}.\frac{4}{14}.\frac{10}{13} \quad , \quad P(WWR) = \frac{10}{15}.\frac{9}{14}.\frac{5}{13}$$

$$P(RWR) = \frac{5}{15}.\frac{10}{14}.\frac{4}{13} \quad , \quad P(WRW) = \frac{10}{15}.\frac{5}{14}.\frac{9}{13}$$

$$P(RRR) = \frac{5}{15}.\frac{4}{14}.\frac{3}{13} \quad , \quad P(WWW) = \frac{10}{15}.\frac{9}{14}.\frac{8}{13}$$

مع ملاحظة أن احتمالات النتائج ليست متساوية لكن

$$P(RWR) = P(RWW) = P(WRW) = \frac{45}{273}, P(WWW) = \frac{72}{273}$$

$$P(WRR) = P(RWR) = P(RRW) = \frac{20}{273}, P(RRR) = \frac{6}{273}$$

4-10 قانون جمع الاحتمالات :

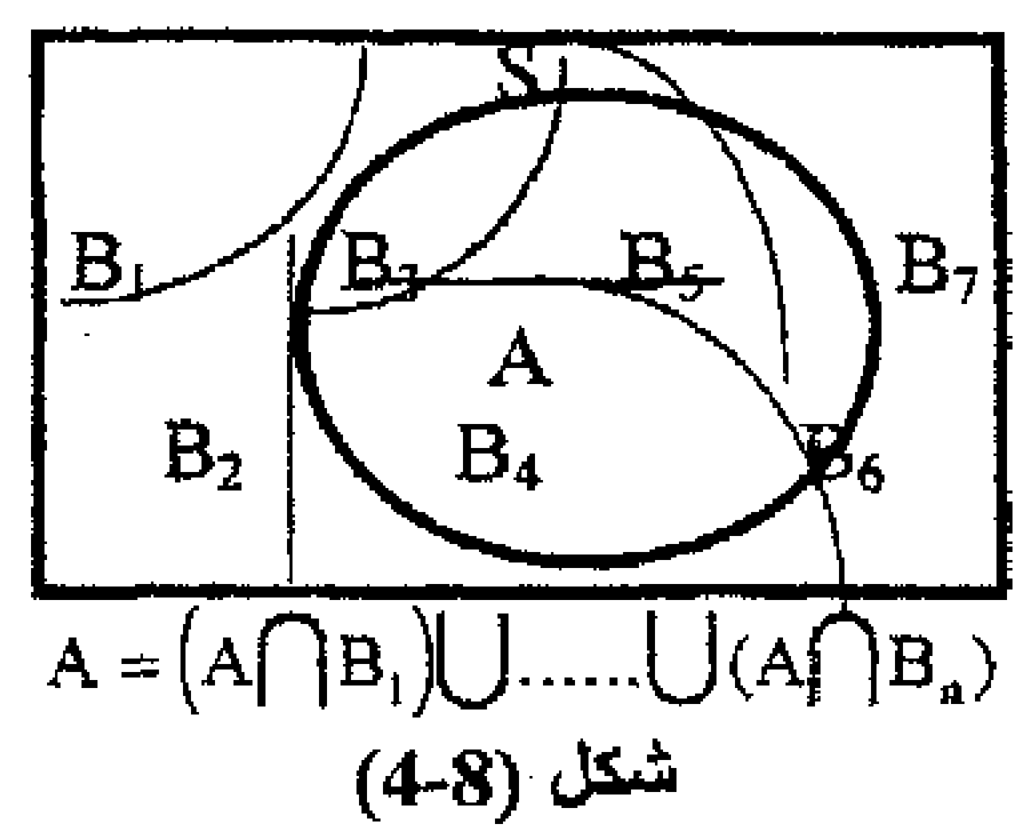
لتكن الأحداث $B_1, B_2, \ldots, B_n$ وتحقق الشروط التالية

a) $Bi \bigcap Bj = \phi \ , \ i \neq j$

b) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$

c) $P(B_i) > 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots\ldots, n.$

وليكن الحادث $A \subset S$ مكون من مجموعة من الأحداث $B_1, B_2, \ldots, B_n$ كما هو موضح في شكل (4-8).



$A = (A \bigcap B_1) \bigcup \ldots\ldots \bigcup (A \bigcap B_n)$

شكل (4-8)

ومن شكل **(4-8)** نلاحظ أن

$$A=(A\cap B_1)\cup.......\cup(A\cap B_n)$$

ولأن $B_1, B_2, ..., B_n$ أحداث منفصلة فإن تقاطعاتها مع الحدث A منفصلة أيضا أي

$$A\cap B_1, A\cap B_2, ..., A\cap B_n$$

أحداث منفصلة وبالتالي فإن

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+........+P(A\cap B_n)$$

ومن المساواة (3-10) فإنه يمكن كتابة

$$P(A)=P(B_1).P(A/B_1)+P(B_2).P(A/B_2)+.......+P(B_n).P(A/B_n) .... \quad (3\text{-}13)$$

ويقال للعلاقة (4-13) بأنها علاقة مجموع الاحتمالات فإذا علم $P(B_i)$, $P(A/B_i)$ فإنه يمكن حساب الاحتمال $P(A)$ وتستخدم لذلك العلاقة (4-13).

مثال (4-10) : إذا كان لدينا أربعة صناديق الأول والثاني بهما 3 كرات سوداء، 4 كرات بيضاء وكذلك الثاني به 9 كرات سوداء، 5 كرات بيضاء والثالث به كرة سوداء، 6 بيضاء. سحبت من أحد هذه الصناديق كرة واحدة بطريقة عشوائية ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء.

الحل : ليكن $B_1 =$ {أن يكون في الصندوق الأول 3 سوداء، 4 بيضاء}،
$B_2 =$ { 9 كرات سوداء، 5 بيضاء}، $B_3 =$ { كرة سوداء، 6 كرات بيضاء}،
$A =$ {الكرة المسحوبة سوداء}
$P(B_i)$: احتمال الكرة المسحوبة ومن أي صندوق.
$P(A/B_i)$: احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء علما بأنها من الصندوق B_i وعليه فإنه بالإمكان كتابة الاحتمالات التالية :

$$P(B_3)=\frac{1}{4},\ P(B_2)=\frac{1}{4},\ P(B_1)=\frac{2}{4}$$

$$P(A/B_3)=\frac{1}{7},\ P(A/B_2)=\frac{9}{14},\ P(A/B_1)=\frac{3}{7}$$

$$P(A)=\frac{2}{4}.\frac{3}{7}+\frac{1}{4}.\frac{9}{14}+\frac{1}{4}.\frac{1}{7}=\frac{23}{56}$$

4-11 صيغة بيز : Bayes Formula

تحتل قاعدة بيز مكانا هاما في مفهوم الاحتمالات وسنوضح المفهوم من خلال المثال التالي.

مثال (4-11) : الكيس A به 3 كرات سوداء،5خضراء،2كرة حمراء.

الكيس B به 6 كرات سوداء، 4 خضراء، كرة حمراء وهنا تلقى قطعة نقود فإذا ألقيت وظهرت صورة فإننا نسحب كرة بطريقة عشوائية من الكيس الأول وإذا ظهرت كتابة سحبت كرة بطريقة عشوائية من الكيس B.
والمطلوب حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء علما بأنها من الكيس A.

الحل : $P(A) = \frac{1}{2}$: احتمال أن الكرة المسحوبة من الكيس A.

$P(B) = \frac{1}{2}$: احتمال أن الكرة المسحوبة من الكيس B.

$P(2/A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$: احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء علما بأنها سحبت من الكيس A.

$P(2/B) = \frac{1}{11}$: احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء علما بأنها سحبت من الكيس B.

ولإيجاد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء فإن.

$$P(2) = P(A).P(2/A) + P(B).P(2/B)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{5} + \frac{1}{2}.\frac{1}{11} = \frac{8}{55}$$

ويمكن تعميم صيغة بيز على النحو التالي :
النص : إذا كانت الأحداث المنفصلة $B_1, B_2, \dots, B_n$ مأخوذة من الفضاء العيني S و كان الحدث A هو حدث من الفضاء العيني S فإن :

$$P(B_i / A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)} \quad , i = 1, 2, \dots, n \quad \dots\dots (4\text{-}14)$$

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)P(A / B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A / B_i)} \quad , i = 1, 2, \dots, n \quad \dots\dots (4\text{-}15)$$

تمارين عامة على الاحتمالات

1) في تجربة القاء حجري نرد معا أحدهما أسود والآخر أحمر معا احسب
   a) احتمال ظهور عدد على الحجر الأسود ضعف العدد على الحجر الأحمر.
   b) احتمال ظهور مجموع 8أو 10 على الوجهين الظاهرين من الحجرين.

2) كيس به عدد الكرات السوداء ستة أضعاف الكرات الحمراء سحبت من الكيس كرة عشوائيا احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

3) عشرة أشخاص يجلسون في صف ما احتمال أن لا يجلس ثلاثة أشخاص معينين جنبا إلى جنب.

4) فصل به 30 طالبا، 15 طالبة يراد تشكيل لجنة مكونة من 5 أشخاص ما احتمال أن تكون اللجنة مكونة من ثلاثة طلاب وطالبتين.

5) يتم توزيع عشرة أشخاص في غرفتين الغرفة A تحتوي على ستة أشخاص والغرفة B تحتوي على أربعة أشخاص ما احتمال أن يكون شخصين معينين في الغرفة A.

6) يراد ارسال 7 رسائل من خلال ثلاثة مكاتب بريد ما احتمال أن ترسل أربعة منها من خلال المكتب الأول واثنتان من خلال المكتب الثاني والثالث من خلال المكتب الثالث.

7) إذا كان A , B حدثان منفصلان وكان $2P(B) = \sqrt{P(A)}$, $A \bigcup B = S$ احسب احتمال A, B

8) إذا كان الفضاء العيني لتجربة معينة مكون من r من الأحداث منها r-3 حدث متساو في احتمال الظهور والثلاثة أحداث أخرى متساوية في الظهور بين بعضها البعض لكن احتمال ظهور ل حدث منها خمسة أضعاف الحدث من بين r-3 فما احتمال ظهور كل حدث.

9) كيس به أربع كرات مرقمة من 4-1 سحبت الكرات الواحدة تلو الأخرى دون الإعادة ما احتمال أن يكون السحب على الترتيب 4، 3، 2، 1.

10) كيس به 20 كرة سوداء، 4 كرات حمراء خلطت معا بشكل جيد وسحبت الكرات الواحدة تلو الأخرى مع عدم الإرجاع ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في السحبة السابعة حمراء.

11) طلي وجهان لحجر نرد باللون الأحمر وثلاثة وجوه باللون الأخضر ووجهة واحد باللون الأصفر ألقي هذا الحجر ثلاث مرات.
   a) ما احتمال ظهور اللون الأحمر في المرة الأولى والثانية بينما الأخضر في الثالثة.
   b) ما احتمال ظهور اللون الأحمر في مرتين والأخضر في مرة واحدة.

12) إذا كان احتمال نجاح ثلاثة طلاب A ,B ,C في فصل ما على التوالي هو 0.95 ، 0.75 ، 0.8 ما احتمال نجاح الثلاثة طلاب معا.

13) إذا كان احتمال حادث ما في تجربة ما هو أ فإذا أجريت التجربة عشرة مرات مستقلة ما احتمال أن يظهر الحادث في مرتين على الأقل.

14) إذا كانت الاحتمالات المعطاة لتجربة ما لحادثين A, B هي

$P(A) = \frac{1}{3}, P(B/A) = \frac{1}{2}, P(A/B) = \frac{1}{3}$ أثبت أن $P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{2}{3}$.

15) يجرب شخص n من المفاتيح لفتح باب إذا علم أن ثلاثة مفاتيح تفتح الباب ما احتمال أن يفتح الباب في المحاولة الخامسة.

16) لدينا ثلاثة أحداث A_1, A_2, A_3 وكان $A_i \cap A_j \neq \Phi$ $i \neq j$, أثبت أن

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3)$$
$$- P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

17) إذا كانت الأحداث A,B,C ثلاث أحداث مستقلة أثبت أن الحادثين A-C, B أحداث مستقلة أيضا.

18) القي حجرا نرد معا فإذا علم أن الحجر الأول هو عدد زوجي احسب احتمال ظهور الرقم 5 على الحجر الثاني.

19) إذا كان $A_i \cap A_j \neq \Phi$ $i \neq j$, فاثبت أن

$$P[(A_1 \cup A_2)/A_3] = P(A_1/A_3) + P(A_2/A_3) - P[(A_1 \cap A_2)/A_3)]$$

20) إذا كان $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \phi$, $P(A) \neq 0$ أثبت أن

$$P[(B_1 \cup B_2 \cup ....)/A] = P(B_1/A) + P(B_2/A) + ...$$

21) إذا كان A, B حادثان غير منفصلان وكان $P(B) \neq 0$ فاثبت أن

$$P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$$

22) إذا كان $P(A/B) > P(A)$ أثبت أن $P(B/A) > P(B)$.

23) إذا كان لدينا A,B,C ثلاثة أحداث فاثبت أن

$$P[C/(A \cap B)]P(A/B) = P[(A \cap C)/B]$$

24) إذا كان لدينا ثلاثة احداث مستقلة A,B,C فاثبت أن

$$P[(A/(B \cup C))] = P(A)$$

25) كيس به عشرة كرات مرقمة من 1-10 وإن احتمال سحب الكرات من الصندوق هو

P (احتمال سحب الكرة ذات الترتيب i) $= K_i$ ، $i = 1$ ، 2 ، ..... ، 10

والمطلوب :

a) احتمال سحب كل كرة.

b) احتمال سحب الكرة ذات الترتيب الثالث إذا علم أن الكرة المسحوبة إما الثالثة أو السابعة.

c) وإذا سحب من الكيس ثلاثة كرات على التوالي فما احتمال عدم الظهور لأن يكون في السحبة الأولى الرقم 5 والسحبة الثانية رقم 7 والسحبة الثالثة الرقم 8.

26) ثلاثة صناديق A, B, C يحتوي الصندوق A على 16 مصباح صالح، 4صناديق غير صالحة بينما الصندوق B يحتوي على 15 مصباح صالح، 5 مصابيح غير صالحة والصندوق C يحتوي على 18 مصباح صالح، 12 غير صالحة، يلقى حجر نرد في الهواء فإذا ظهر الرقم 1، 2 نسحب من الصندوق A مصباحين مع عدم الإعادة وإذا ظهر الرقم 4، 5، 4 نسحب من الصندوق B وإذا ظهر الرقم 6 نسحب من الصندوق C والمطلوب.

a) حساب احتمال أن يكون المصباحين سليمين.

الفصل الخامس
المتغيرات العشوائية ذات البعد الواحد

الفصل الخامس

المتغيرات العشوائية ذات البعد الواحد

5-1) مقدمة

سوف نستعرض في هذا الفصل تعريف المتغيرات العشوائية ودوالها الاحتمالية ولقد عرفنا في فصل سابق بأن **الفضاء العيني** للتجربة ما هو إلا مجموعة النتائج المتوقعة من إجراء تجربة ما وأن **الحادث** ما هو إلا مجموعة جزئية من الفضاء العيني. وفي بعض التجارب كانت عناصر مجموعة الفضاء العيني ما هي إلا أعدادا كما هو الحال $S=\{1,2,3,4\}$. بينما البعض الآخر عبارة عن رموز ليست عددية كما هو الحال $S=\{HH,HT,TH,TT\}$

وفي هذه الحالة نريد التعبير عن هذه النتائج بشكل عددي نضطر بتعريف المتغير العشوائي الذي سيعبر عن حالة عددية

5-2 : تعريف المتغير العشوائي

تعريف(5-1) : الدالة التي ترتبط كل عنصر من عناصر الفضاء العيني مع عدد حقيقي يسمى بالمتغير العشوائي.

وسوف نعبر عن المتغيرات العشوائية بالأحرف الكبيرة .... ,X, Y وعن القيم العددية التي يأخذها كل متغير بالأحرف الصغيرة .... ,x, y فإذا كان الفضاء العيني منتهيا أو غير منتهي سوف نعبر عن كل متغير وما سيأخذه من قيم كواحد من الحالات التالية :

$$(X=x) = \{S:X(S)=x\}$$

أو

$$(X\leq x) = \{S:X(S)\leq x\} \qquad ....(5\text{-}1)$$

أو

$$(X>x) = \{S:X(S)> x\}$$

أو

$$(a \le X \le b)=\{S:a \le X(S \le b\}$$

واحتمالات كل قيمة من قيم المتغير العشوائي يمكن التعبير عنها على النحو التالي.

$$P(X=x) = P[X(S)=x] \qquad ....(5\text{-}2)$$

أو

$$P(X\le x) = P[X(S)\le x]$$

أو

$$(X>x) = P[X(S)> x]$$

أو

$$P(a \le X \le b)=P[a \le X(S) \le b]$$

واحتمال جميع قيم لمتغير العشوائي تكون مساوية للواحد الصحيح.

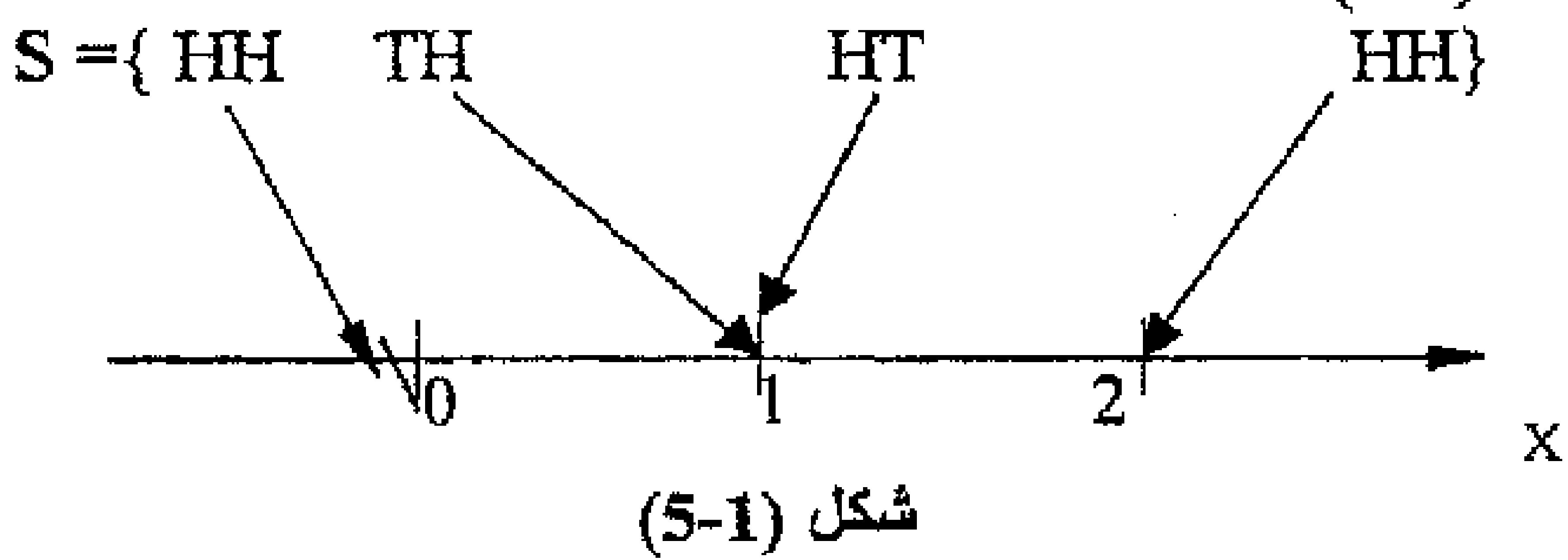
مثال (1-5) : في تجربة القاء قطعتي نقود متمايزتين وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد الصور الظاهرة على الوجه العلوي. اكتب القيم التي يأخذها المتغير ثم أوجد احتمال كل متغير.

الحل : نكتب الفضاء العيني لهذه التجربة. $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ وعليه فإن القيم التي يأخذ المتغير العشوائي هي كما في جدول (1-5).

X	0	1	2
P(x)	1/4	2/4	1/4

جدول(1-5)

وحول كيفية اقتران كل عنصر من الفضاء العيني مع عدد حقيقي ليمثل المتغير العشوائي X يوضح بالشكل (1-5).



شكل (1-5)

3- 5 : القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X :

إذا كانت قيم المتغير العشوائي X هي ......، x_1, x_2 وكانت احتمالات كل قيمة على التوالي $P(X=x_1), P(X=x_2), \ldots\ldots, P(X=x_n)$ فإن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي والتي سنرمز لها بالرمز E(X) يمكن إيجادها على النحو

$$E(X) = x_1P(X=x_1) + x_2 P(X=x_2) + \ldots\ldots x_n P(X=x_n)$$

وبصيغة المجموع تصبح القيمة المتوقعة على النحو التالي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) \qquad \ldots\ldots\ldots(5-3)$$

وتسمى القيمة المتوقعة E(X) بالمتوسط المركزي وباختصار يرمز لها بالرمز μ

5-4 خصائص التوقع الرياضي.

1) إن القيمة المتوقعة للعدد الثابت c هي نفسها c أي $E(c) = c$

مثال (5-2) : أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات ظهور صورة في تجربة القاء قطعة نقود ثلاث مرات.

الحل : نكتب الفضاء العيني للتجربة.

$$S = \langle HHH, HHT, HTH, HTT, THH, TTH, THT, TTT \rangle$$

ثم نكتب جدول التوزيع الاحتمالي (5-2) للمتغير العشوائي X.

X	0	1	2	3
P(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

جدول (5-2)

ثم نجد القيمة المتوقعة.

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

مثال (5-3) : إذا كانت القيم التي يأخذها متغير عشوائي X معطاة على النحو 2m, 2m, $m, \ldots\ldots m(m-1), m^2$ وعلى اعتبار ان k عدد ثابت وكانت دالة الاحتمال لهذا المتغير هي $P(X = x) = \frac{2x}{K}$ أوجد قيمة الثابت K.

الحل : بما أن التوزيع احتمالي فإن مجموع الاحتمالات لجميع القيم يساوي واحد وعليه نكتب احتمال كل متغير على النحو.

$$P(X=m)=\frac{2m}{K}$$

$$P(X=2m)=\frac{4m}{K}$$

$$\vdots$$

$$P(X=m^2)=\frac{2m^2}{K}$$

وهذه الاحتمالات مجموعها يساوي واحد أي.

$$\frac{2m}{K}+\frac{4m}{K}+2+\ldots\ldots.+\frac{2m^2}{K}=1$$

وإذا أخذنا عامل مشترك $\frac{2m}{K}$ يبقى.

$$\frac{2m}{K}(1+2+3+\ldots\ldots..m)=1$$

ومن علاقة مجموع m من الأعداد نجد أن

$$\frac{2m}{K}.\frac{m(m+1)}{2}=1\Rightarrow k=m^2(m+1)$$ وهو المطلوب.

مثال (4-5) : في تجربة القاء قطعة نقود لحين ظهور صورة أو ظهور 4 كتابات فإذا القيت ثلاث مرات فأكثر فإن اللاعب يكسب 200 قرش وعكس ذلك يخسر 150 قرش احسب القيمة المتوقعة لهذا اللاعب.

الحل : نكون الفضاء العيني لهذه التجربة على النحو.

S = { TTTT ،TTTH ،TTH ،HTH}

نكون جدول التوزيع الاحتمالي جدول (3-5)

X	200	-150
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

p(X=200) = p{TTTT،TTTH ،TTH }

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

$$P(-150)=\frac{3}{4}$$

وعليه فإن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X هو.

$$E(X) = 200\left(\frac{1}{4}\right) + (-150)\left(\frac{3}{4}\right) = 50 - 112.5 = -62.5$$ قروش

5-4 : توقع دالة المتغير العشوائي :

تسمى الدوال المرتبطة بالمتغير العشوائي X دوال المتغير العشوائي وكون المتغير العشوائي X فإن الدوال $ax, x+b, bx^2, (x-a)^2$ جميعها دوال للمتغير العشوائي X وفي هذه الحالة a, b ثابتان وسنعبر عن هذه الدوال بالرموز

$Y = g(x)$ ، $Z = h(x)$ وهكذا وإذا كانت القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ فإن الدالة المرتبطة بهذا المتغير العشوائي Y تأخذ القيمة $y_1=g(x_1), y_2=g(x_2), \ldots\ldots, y_n=g(x_n)$ وبالتالي فإن احتمال قيم دالة المتغير العشوائي هي نفسها احتمالات القيم التي يأخذها المتغير العشوائي أي

$$P(Y = y_i = g(x_i)) = P(X = x_i)$$

وعليه فإن القيمة المتوقعة لدالة المتغير العشوائي.

$$E(Y) = E[g(x)] = y_1.P(Y = y_1) + y_2.P(Y = y_2) + \ldots\ldots\ldots + y_n(x_n)P(X = X_n)$$
$$= g(x_1).P(X = x_1) + g(x_2)P(X = x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + g(x_n)P(X = x_n)$$

أو بصيغة المجموع.

$$E[g(x)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i).P(X = x_i) \ldots\ldots\ldots\ldots (5\text{-}4)$$

مثال (5-5) : إذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X المبين في جدول (4-5)

X	0	1	2
P(x)	0.2	0.3	0.5

جدول(4-5)

والمطلوب إيجاد القيمة المتوقعة للدوال التالية

$Y = 3x$ (1 $W = 2x^2$ (2 $Z = x^3$ (3

الحل : كما ذكرنا سابقا أن الاحتمالات للدوال هي نفسها للمتغير العشوائي. وعليه

$$1)\ E(Y) = 3(0(0.2) + 1.(0.3) + 2(0.5)) = 3(0.3 + 1.0)$$

$= 3(1.3) = 3.9$

$2)\ E(W) = 2(0^2(0.2) + 1^2(0.3) + 2^2(0.5)) = 2(0+0.3+2.)$

$= 2(2.3) = 4.6$

$3)\ E(Z) = 0^3(0.2) + 1^3(0.3) + 2^3(0.5) = 0 + 0.3 + 4. = 4.3$

نظرية (5-1) : ليكن X متغيراً عشوائياً وليكن a, b ثابتان فإن

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

البرهان : بالعودة للعلاقة (5-4) فإن :

$E(ax+b) = (ax_1+b)P(x=x_1)+(ax_2+b).P(x=x_2) + ... + (ax_n+b)P(x=x_n)$

نتناول الطرف الأيمن ونعمل على فك الأقواس.

$= ax_1P(X=x_1)+b.P(X=x_1)+ax_2P(X=x_2)+b.P(X=x_2)+$

$....... + aX_nP(X=x_n) + b.\ P(X = x_n)$

ثم نعمل على ترتيب الحدود وأخذ العامل المشترك مرة أخرى لنحصل على

$= a\ [x_1P(X=x_1) + x_2\ P(X=x_2) + ... + x_n\ P(X = x_2)]$

$+ b\ [P(X = x_1) + P(X=x_2) + ... + P(X = x_n)]$

$$E(aX + b) = a\ E(X) + b \qquad .... (5\text{-}5)$$

لأن:

$P(X=x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X=x_n) = 1$ وأن

$$E(X) = x_1P(X=x_1) + x_2P(X=x_2) + ... + x_nP(X=x_n)$$

ويتم المطلوب.

نظرية (5-2) : لتكن $\mu = E(X)$ هي الوسط الحسابي للمتغير العشوائي X فإن $E(X-\mu) = 0$

البرهان : حسب النظرية (4-1) وبالتعويض عن $a = 1$, $b = \mu$ يصبح

$E(X-\mu) = E(X) - \mu \Rightarrow \mu - \mu = 0$ لأن $E(X) = \mu$ ويتم المطلوب.

5 -5 : تباين المتغير العشوائي :

إن التباين والانحراف المعياري هما مقياسان أساسيان لقياس مقدار التغير بين قيم المشاهدات

ووسطها الحسابي وسنرمز للتباين بالرمز $V(X)$ أو σx^2. وعليه سنعرف التباين بالعلاقة التالية :

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] \qquad \text{............... (5-6)}$$

أما الانحراف المعياري والذي سنرمز له بالرمز σx سيكون هو الجذر التربيعي الموجب للتباين وعليه فإن

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

نظرية (3-5): إن تباين المتغير العشوائي X والذي قيمته المتوقعة $\mu = E(X)$ هو

$$V(x) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

البرهان : نبدأ بالعلاقة (4-6)

$$V(X) = E[(X - \mu)^2]$$

$$= E[X^2 - 2X\mu + \mu^2]$$

وعلى اعتبار أن μ عدد ثابت $= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2)$

$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 \qquad \text{................. (5-7)}$$

وهو المطلوب.

مثال (6-5): إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X معطى بالجدول (5-4).

X	1	2	3	4
P(X)	0.1	0.1	0.5	0.3

جدول (5-5)

المطلوب إيجاد التباين والانحراف المعياري لهذا المتغير العشوائي.

الحل : نجد أولا توقع المتغير العشوائي X أي

$$E(X) = 1(0.1) + 2(0.1) + 3(0.5) + 4(0.3)$$

$$= 0.1 + 0.2 + 1.5 + 1.2 = 3$$

نجد $E(X^2)$ على النحو

$$E(X^2) = 1^2(0.1) + 2^2(0.1) + 3^2(0.5) + 4^2(0.3)$$
$$= 0.1 + 0.4 + 4.5 + 4.8 = 9.8$$

نجد التباين من العلاقة

$$\sigma_x^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= 9.8 - (3)^2 = 9.8 - 9 = 0.8$$

ولإيجاد الانحراف المعياري نجده من العلاقة التي تربطه بالتباين.

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0.8} = 0.9$$

نظرية (4-5) : إذا كان X متغيرا عشوائيا تباينه $V(X)$ وكان c عدد ثابت فإن

a) $V(X + c) = V(X)$

b) $V(cX) = c^2.V(X)$

البرهان :

a) من العلاقة (6-5) نضع بدلا من X القيمة $X + c$ لتصبح

$$V(X+c) = E\{[(X+c) - E(X+c)]^2$$
$$= E\{[(X+c) - E(X) - c]^2\}$$
$$= E\left[(X-\mu)^2\right]$$
$$V(X+c) = V(X) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5\text{-}8)$$

b) من العلاقة (6-5) نجد أن

$$V(cX) = E\{[cX - E(cX)^2]\}$$

يأخذ العامل المشترك

$$= E\{[cX - cE(X)]^2\}$$
$$= E\{[c(X - E(X)]^2\}$$
$$= E\{[c^2(X-\mu)^2]\}$$

$$V(cX) = c^2.V(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5\text{-}9)$$

وهو المطلوب.

نتيجة : إذا كان a, b ثابتين فإن

1) $V(aX + b) = a^2V(X)$

2) $\sigma_{c-x} = \sigma_x$
3) $\sigma_{cx} = |c|\sigma_x$

نظرية (5-5) : إذا كان الوسط الحسابي لمتغير عشوائي μ وتباينه σ^2 فإن المتوسط الحسابي للمتغير العشوائي $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$ هو

1) $E(X^*) = 0$
2) $V(X^*) = 1$

البرهان : من العلاقات (5-5) ، (5-8)، (5-9) ينتج أن

$$E(X^*) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{E(X)-\mu}{\sigma} = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = 0$$

وهذا هو اثبات المطلوب الأول.

$$V(X^*) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}.V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

وهذا هو المطلوب الثاني.
ويقال للمتغير العشوائي X^* بالمتغير العشوائي القياسي.

5-6 : المتغيرات العشوائية المنفصلة :

5-6-1 : تعريف المتغير العشوائي المنفصل

ليكن X متغير عشوائي حقيقي وأن عدد القيم التي يأخذها المتغير X منتهية أو قابلة للعد في اللانهاية فإنه يقال للمتغير العشوائي X بأنه متغير منفصل مثلا ذلك مجموع الأوجه الظاهرة في تجربة ألقاء حجري نرد، عدد الأبناء الذكور في عائلة لديها 4 أطفال، عدد الصور، الظاهرة في تجربة القاء قطعة نقود ثلاث مرات كلها تمثل متغيرات عشوائية منفصلة.

5-6-2 : تعريف الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل :

ليكن X متغير عشوائي منفصل فإن لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي وهي X_i يوجد احتمال هو $P(X_i)$ ، $i = 1, 2, \ldots$ ويحقق الشروط التالية :

$$a)\ P(x) = 0\ ,\ x \notin R_x$$
$$b)\ 0 \leq P(x_i) \leq 1\ ,\ V_{xi} \in R_x$$
$$c)\ \sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$$

مثال (5-7) : كيس به كرة حمراء وثلاث كرات سوداء سحبت من هذا الكيس كرة بشرط أن يكون السحب دون الإعادة وتنتهي عملية السحب حتى ظهور الكرة الحمراء فإذا كان المتغير العشوائي يمثل عدد مرات تكرار عملية السحب أوجد الدالة الاحتمالية لهذا المتغير.

الحل : نكتب أولا الفضاء العيني للتجربة.

S = { R ، BR ، BBR ، BBBR ، .... }

وهنا إذا كان عدد مرات ظهور الكرة السوداء هو x-1 فإن x ظهور كرة حمراء وعليه فإن.

$$P(X) = P(X = x) = \begin{cases} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} . \frac{1}{4}, x = 1, 2, 3 \\ = 0 \end{cases} \quad \text{.........} \ (5\text{-}10)$$

لقيم x الأخرى.

والدالة أعلاه هي الدالة الاحتمالية وتحقق الشروط التالية :

$$\text{a)} \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} . \frac{1}{4} \geq 0\ ,\ x = 1, 2, \ldots\ldots$$

$$\text{b)} \sum_{x=1}^{\infty} P(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} . \frac{1}{4} = \frac{1}{4} . \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 1$$

والشكل (5-2) يمثل العلاقة (5-10)



شكل (5-2)

مثال (5-8) : إذا أعطينا الدالة التالية :

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & , \ x = 1, 2, \ldots\ldots \\ 0 & \text{لقيم X الأخرى} \end{cases}$$

فهل الدالة P(x) دالة احتمالية.

الحل : حتى نتحقق من كون P(x) دالة احتمالية يتطلب التحقق من الشروط السابقة للدالة الاحتمالية

1) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \geq 0, \ \ x = 1,2, \ldots\ldots\ldots$

2) $\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \frac{3}{4} \neq 1$

وعليه ولعدم تحقق أحد الشروط فإن $P(x)$ ليست دالة احتمالية.

مثال (5-9) : الدالة الاحتمالية لمبيعات بائع جرايد يومية التي تأخذ متغيرا عشوائيا معطاة كما يلي :

$$P(x)=\begin{cases}\frac{1}{2500}x\ , & x=1,2,\ldots\ldots,50\\ \frac{1}{2500}(100-x)\ , & x=51,\ldots\ldots,100\\ 0\ , & \text{لقيم } X \text{ الأخرى}\end{cases}$$

احسب الاحتمالات التالية .

a) احتمال أن يبيع أكثر من 50 جريدة. b) احتمال أن يبيع أقل من 50 جريدة.

c) احتمال أن يبيع بين 75-25 بما فيها الحدود جريدة. d) احتمال أن يبيع فقط 50 جريدة.

الحل : الاحتمالات المطلوبة

احتمال أن يبيع أكثر من خمسين جريدة

$$a)\quad P(x>50)=\sum_{x=51}^{100}\frac{1}{2500}(100-x)$$

$$=\frac{1}{2500}(49+48+\ldots\ldots+1+0)=\frac{1}{2500}\times\frac{49\times 50}{2}$$

$$=\frac{49}{100}$$

احتمال أن يبيع أقل من خمسين جريدة :

$$b)\ P(X<50)=\sum_{x=1}^{49}\frac{1}{2500}X=\frac{1}{2500}\sum_{x=1}^{49}X=\frac{1}{2500}(1+2+\ldots\ldots+49)$$

$$=\frac{1}{2500}\times\frac{49\times 50}{2}=\frac{49}{100}$$

احتمال أن يبيع عدد يتراوح بين 25 ، 75 جريدة :

$$c)\ P(25<X<75)=\sum_{x=25}^{50}\frac{1}{2500}X+\sum_{x=51}^{75}\frac{1}{2500}(100-x)=\frac{76}{100}$$

$$d)\ P(x=50)=\frac{50}{2500}=\frac{1}{50}$$

يلاحظ أن $P(X>50)+P(X=50)+P(X<50)=1$

5-7 : المتغيرات العشوائية المتصلة

5-7-1 : تعريف المتغير العشوائي المتصل.

ليكن X متغير عشوائي حقيقي فإذا كانت منطقة تعريف المتغير هي فترة أو مجموعة فترات فانه يقال لهذا المتغير العشوائي بأنه متغير متصل. مثال على ذلك أطوال الطلاب أو عمر ماكينه. وتكون منطقة تعريف المتغير العشوائي المتصل على النحو التالي.

مجموعة فترة واحدة $R_x = \{a \le X \le b\}$

مجموعة فترتين $R_x = \{c < X < d,\ e < x < f\}$

ويمكن أن يكون الحد الأدنى لمنطقة التعريف هو ∞ - والحد الأعلى $+\infty$

5-7-2 : الدالة الاحتمالية للمتغير المتصل (دالة الكثافة الاحتمالية)

لنأخذ المتغير العشوائي المتصل X فإذا حققت الدالة الشرط التالية فنقول بأن الدالة هي دالة الكثافة الاحتمالية و أما الشروط فهي.

a) $f(x) = 0 \quad , \ X \notin R_x.$

b) $f(x) \ge 0 \quad , \forall x \in R_x.$

c) $\int_{R_x} f(x)dx = 1$

مثال (5-10) : إذا كان لدينا الدالة f(x) والمعرفة كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} 2x \ , & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{لقيم X الأخرى} \end{cases}$$

هل f (x) دالة كثافة احتمالية ؟

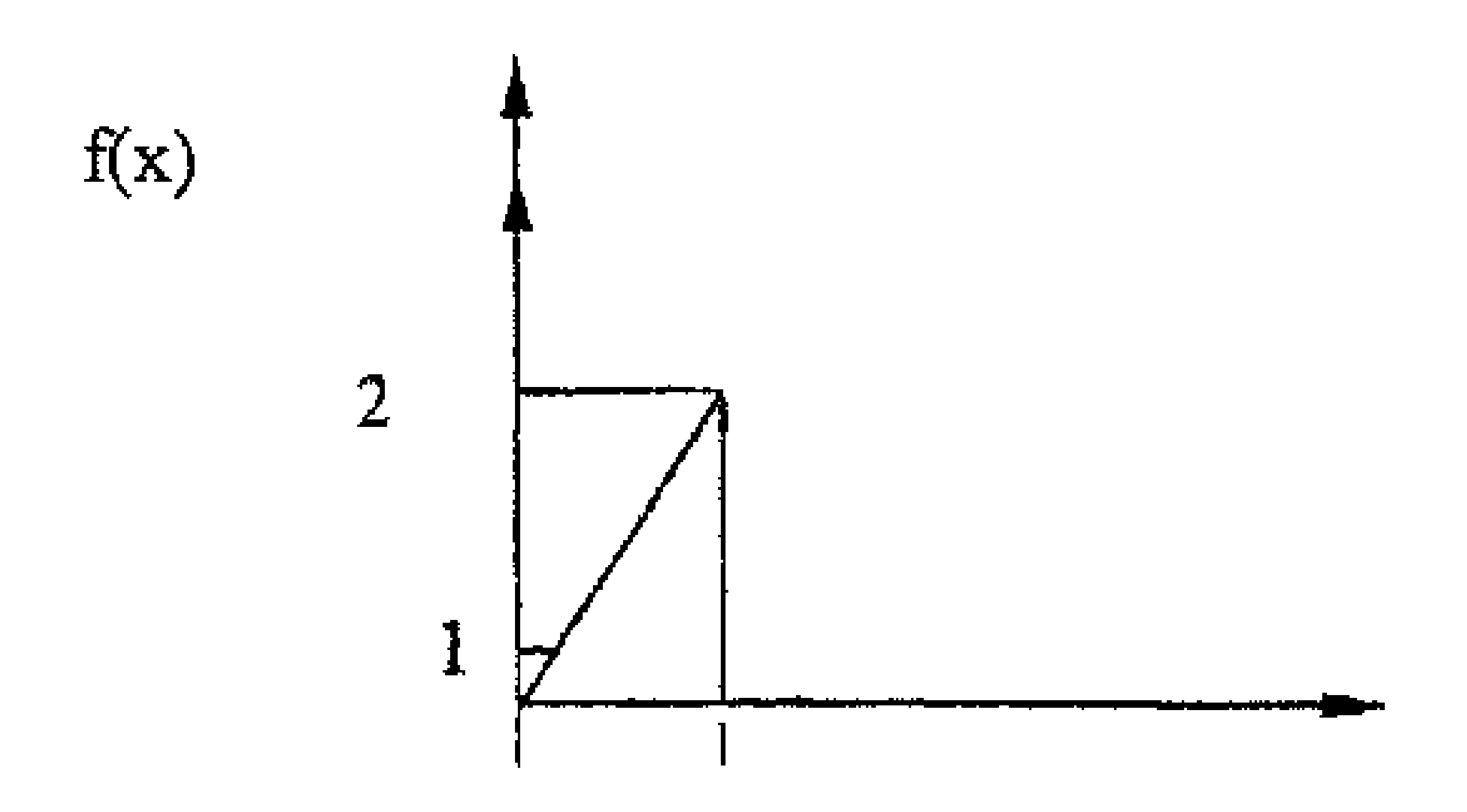
الحل : بالعودة لشروط دالة الكثافة الاحتمالية فإن

a) لكل قيمة x في منطقة التعريف فإن $f(x) \ge 0$

b) لو أخذنا تكامل الدالة في الفترة المحددة فإن

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2xdx = 2\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$$

ولتحقيق الشروط السابقة فان f(x) هو دالة كثافة احتمالية وهو المطلوب أما بيان هذه الدالة f(x)=2x فهو كما يظهر في الشكل (5-3)



شكل (5-3)

وإذا كان $f(x)$ دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي المتصل فإن الاحتمالات $P(X \leq a), P(x \leq a), P(a < x < b), ...$ تظهر على النحو التالي :

$$P(x \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx,$$

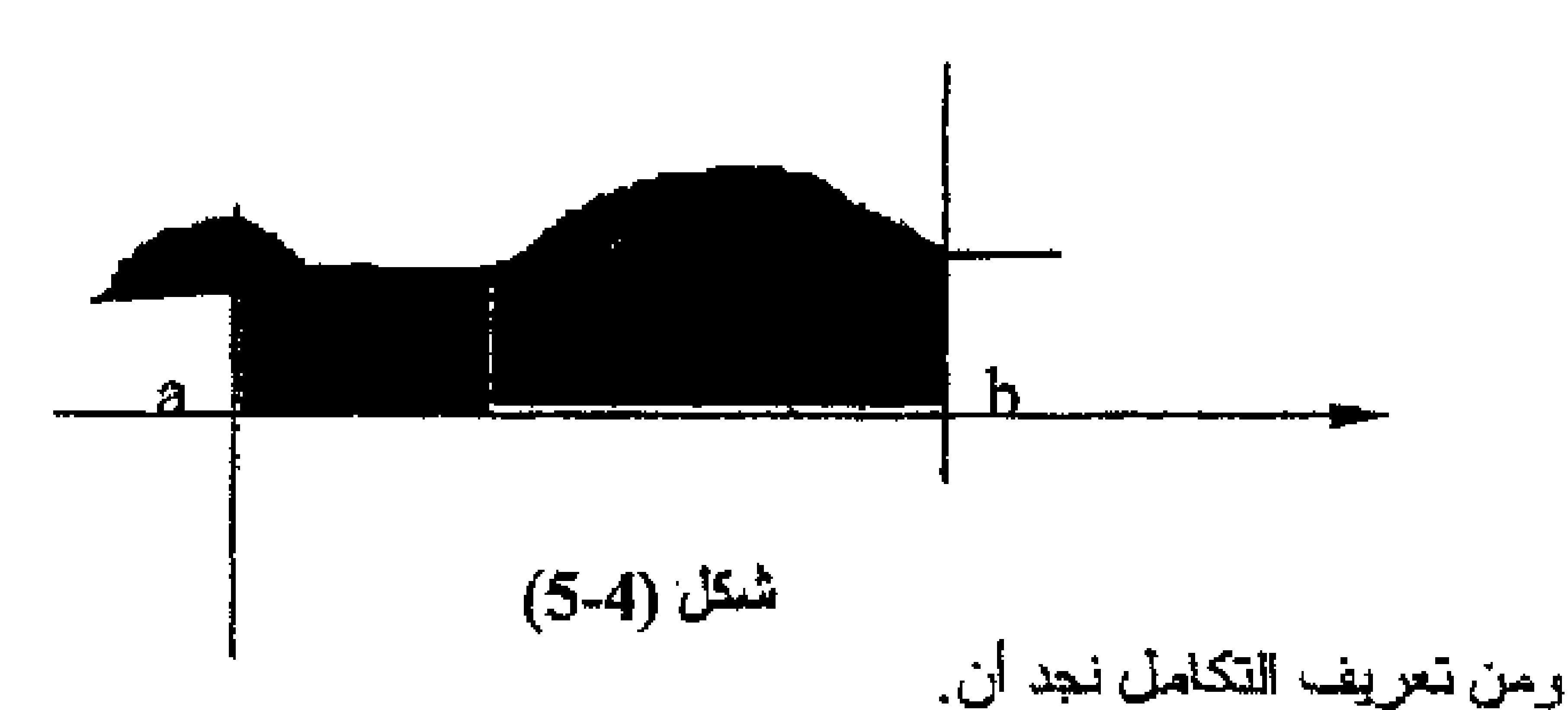
$$P(x > a) = \int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

وهنا وبشكل عام فإن منطقة التعريف $R_x = \{-\infty < x < \infty\}$ أما في الحالات الخاصة

يستبدل ∞، ∞- بالحدود العليا والدنيا المعطاه.
ن بيان دالة الكثافة الاحتمالية للدالة f(x) تتمثل بالمنطقة المظللة في شكل (5-4).





شكل (5-4)

ومن تعريف التكامل نجد أن.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx = 1$$

أو ....(5-11)

$$P(X \geq a) + P(X < a) = P(X > a) + P(X \leq a) = 1$$

مثال (5-11): إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X معطاة بالعلاقة التالية.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 < x < 1 \\ 0 & \text{لقيم X الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد $P(x \geq 0.5), P(< 0.5), P(0.3 \leq x \leq 0.5)$

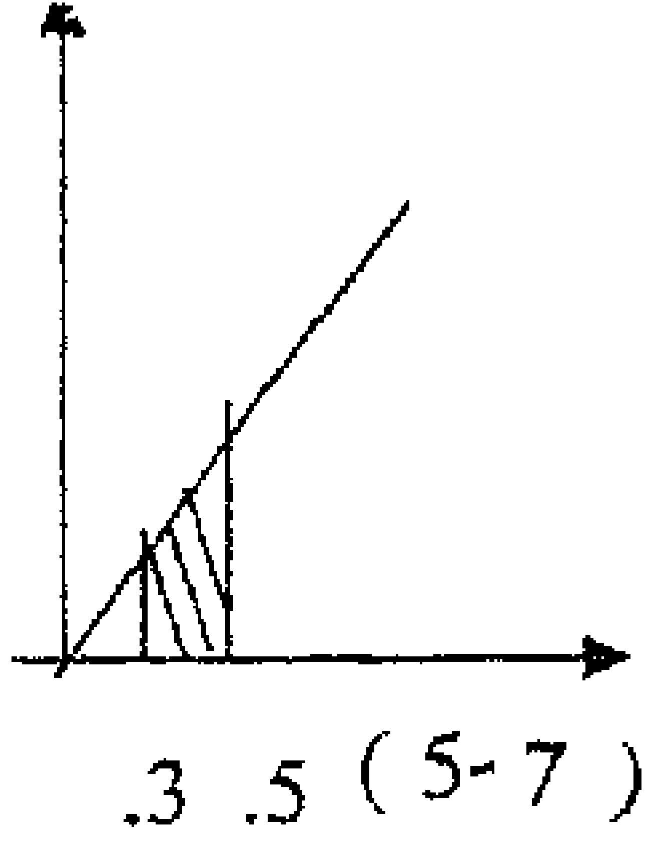
الحل :

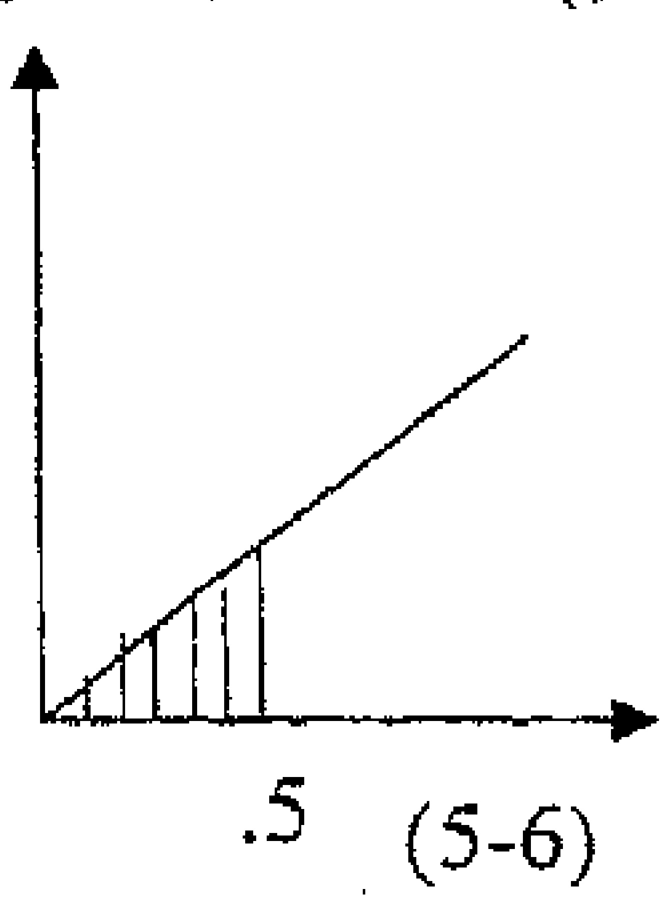
$$1) P(x \geq 0.5) = \int_{0.5}^{1} 2x dx = \frac{2x^2}{2}\Big]_{0.5}^{1} = x^2 \Big]_{0.5}^{1} = 1^2 - (0.5)^2 = 0.75$$

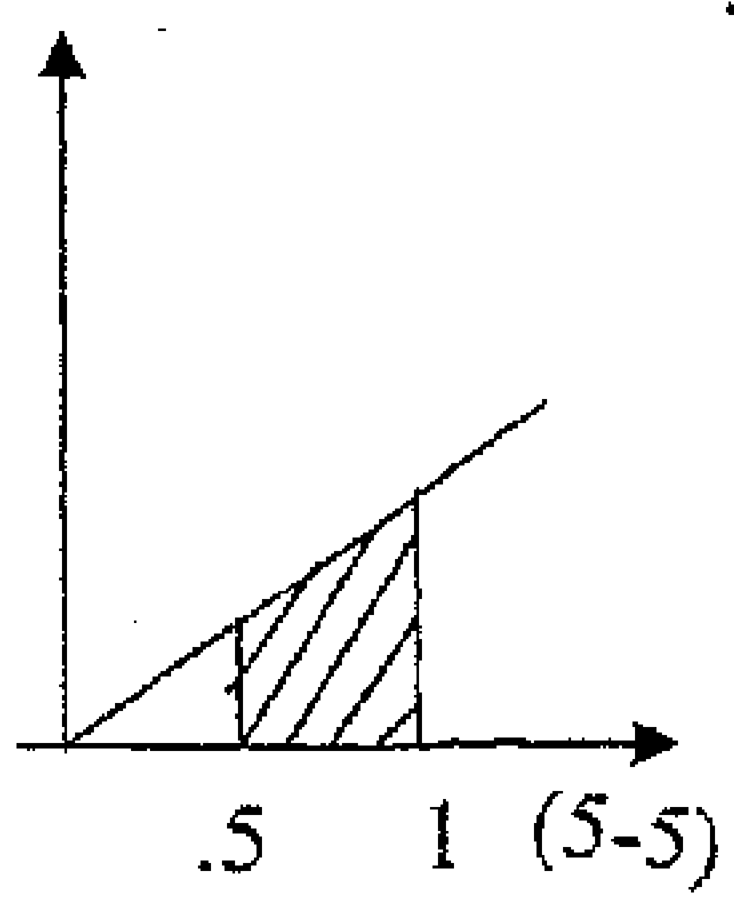
$$2) P(x < 0,5) = \int_{0}^{0,5} 2x dx = x^2 \Big]_{0}^{0.5} = 0.25$$

$$3)\ P(0.3 < x < 0.5) = \int_{0.3}^{0.5} 2x\,dx = x^2\Big]_{0.3}^{0.5} = (0.25 - 0.09) = 0.16$$

والأشكال (5-5)، (5-6) ، (5-7) تمثل المناطق المطلوبة.







5-8 : دوال التوزيع

5-8-1 : تعريف دالة التوزيع :

إذا كان المتغير العشوائي X وكان x عدد حقيقي وكان الحدث $(X \le x) = \{S: X(S) \le x\}$ فإن احتمال الحدث $P(X \le x), P(X \le x)$ مرتبط بقيمة X وبصيغة أخرى هو دالة المتغير X وتسمى هذه الدالة باسم دالة التوزيع للمتغير العشوائي X (دالة التوزيع التجميعي). ويرمز له بالرمز $F_X(x)$ أو $F(x)$ وعليه فإن $F(x) = P(X \le x)$ ولكل قيمة x فإن $0 \le F(x) \le 1$ أما إذا كان المتغير العشوائي X منفصلا فإن دالة التوزيع تصبح على النحو

$$F(x) = \sum_{n \le X} P(n) \qquad \text{.............} \ (5\text{-}12)$$

أما إذا كان المتغير العشوائي X متصلا فإن دالة التوزيع لهذا المتغير العشوائي تكتب بالصورة التالية

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad \text{.............} \ (5\text{-}13)$$

5-8-2 : خواص دالة التوزيع :

تتمتع دالة التوزيع بالخواص التالية :

a) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

وهنا أخذ $R_x = \{-\infty < x < +\infty\}$

b) الدالة $F(x)$ دالة متزايدة بالنسبة للمتغير x يعني.

لكل $x_1 < x_2$ فإن $F(x_1) \le F(x_2)$

الاثبات : إذا كان $x_1 < x_2$ فإن الحدث $(x_1 \le x_2)$ هو حدث محتوى بالحدث $(x_1 < x_2)$ وعليه فإن:

$$P(X \le x_1) \le P(X \le x_2)$$

c) إذا كان $x_1 < x_2$ فان:

$$P(x_1 < x \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

الاثبات : لكون $x_1 < x_2$ يمكننا كتابة ما يلي:

$$(x \le x_2) = (x \le x_1) \bigcup (x_1 < x \le x_2)$$

ولكون الطرف الأيمن عبارة عن حدثين منفصلين فإنه يمكن كتابة أعلاه بالصورة التالية:

$$P(x_1 < x \le x_2) = P(x \le x_2) - P(x \le x_1)$$ ومن هنا فإننا نجد أن

$$P(x_1 < x \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

d) إن دالة التوزيع للمتغير العشوائي المنفصل X هي أيضا منفصلة.

e) إن دالة التوزيع للمتغير العشوائي المتصل X هي أيضا متصلة ويمكن كتابة وذلك

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

f) إذا كانت $F(x)$ هي دالة التوزيع للمتغير العشوائي المتصل أم المنفصل فإن:

$$P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$$

مثال (5-12): إن الدالة الاحتمالية للمتغيرة العشوائي المنفصل X معطاة بالعلاقة التالية:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{55}x & , \quad x = 1, 2, \dots, 10 \\ 0 & \text{لقيم } X \text{ الأخرى} \end{cases}$$

a) أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي X.

b) باستخدام دالة التوزيع أوجد

(1) $P(2 \le x \le 4)$ (2) $P(x \le 3)$ (3) $P(x > 2)$

الحل : a) من تعريف دالة التوزيع فان:

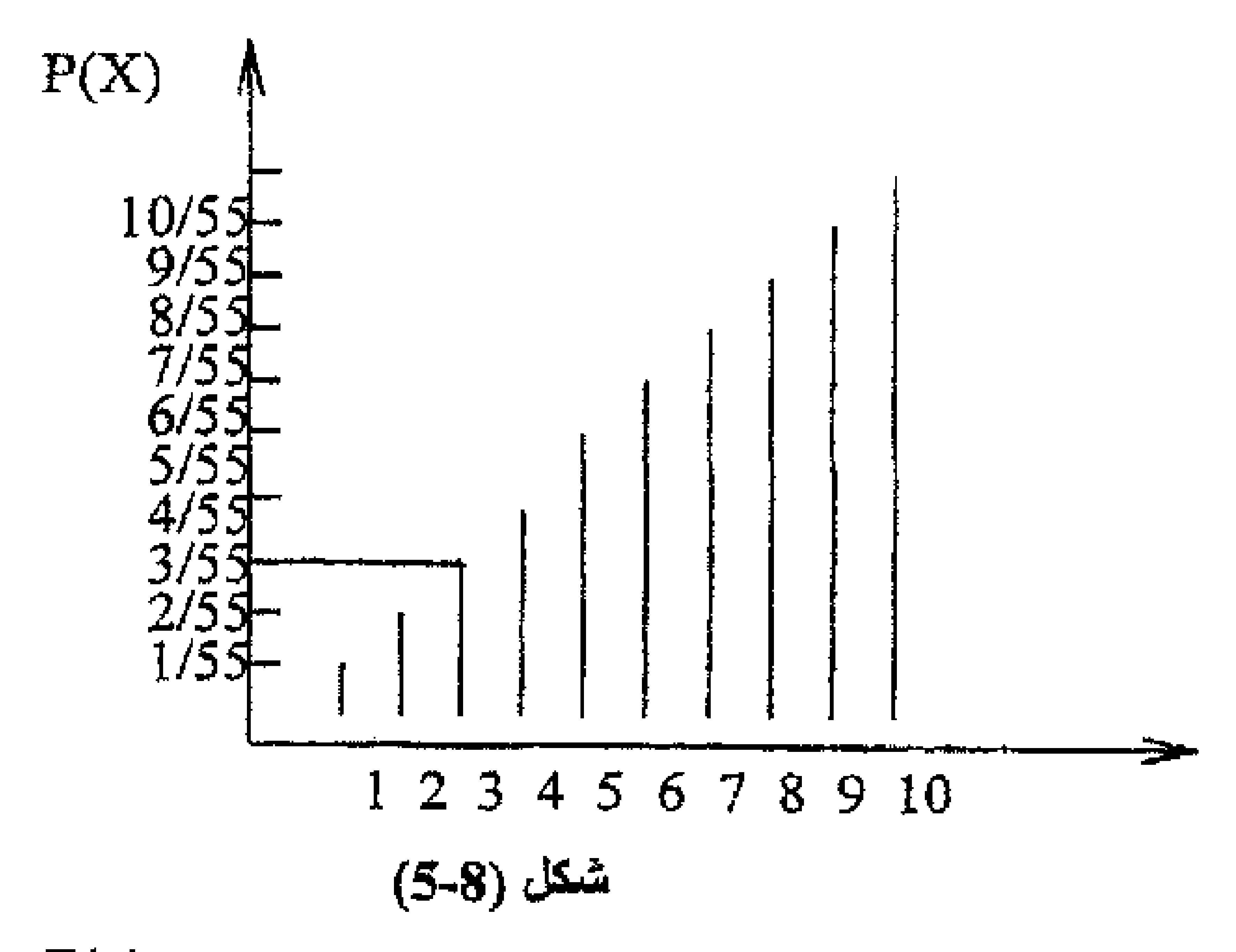
$$F(x)=\sum_{n=1}^{x}P(n)=\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{55}.n=\frac{1}{55}\sum_{n=1}^{x}n$$

$$=\frac{1}{55}\frac{x(x+1)}{2}=\frac{x(x+1)}{110}$$

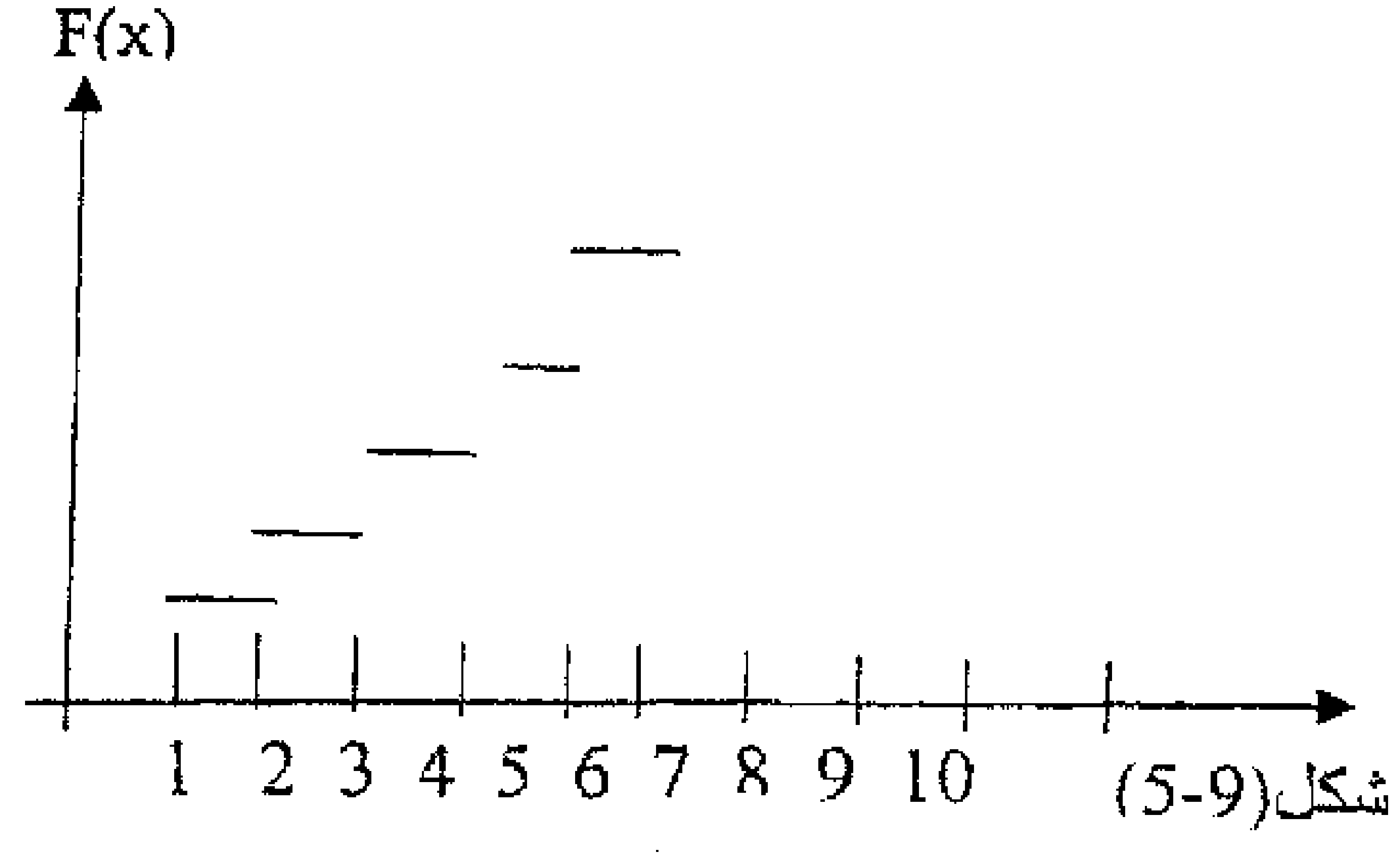
وعليه يمكن كتابة دالة التوزيع على النحو التالي :

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x<1\\ \frac{x(x+1)}{110} & ,x=1,\ 2,\ .....\ ,10\\ 1 & ,x\geq 10\end{cases}$$

وبيان الدالة الاحتمالية مبين بالشكل(5-8)بينما بيان دالة التوزيع مبين بالشكل (5-9)



شكل (5-8)



شكل(5-9)

b) ومن دالة التوزيع فان

$$1)\ P(2 \le X \le 4) = F(4) - F(2) = \frac{20}{110} - \frac{2}{110} = \frac{18}{110} = \frac{9}{55}$$

$$2)\ P(X \le 3) = F(3) = \frac{6}{55}$$

$$3)\ P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{6}{110} = \frac{104}{110} = \frac{52}{55}$$

مثال (5-13) : إذا كانت الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل X معطاة بالعلاقة التالية :

$$P(X) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^x & , x = 0,1,2,\ldots\ldots \\ 0 & \text{لقيم X الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب : إثبات أنه لأي قيم m, r الصحيحة والموجبة فان المساواة $P(X > m + r / X > m) = P(X \ge r)$ متحققة

الحل : من العلاقة (5-12) فان

$$F(x) = \sum_{n=0}^{x} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{2}{3} + \ldots\ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^X\right] = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{X+1}$$

والصيغة أعلاه تكتب على النحو

$$F(X) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} & , x = 0,1,2,\ \ldots\ldots \\ 0 & , x \to +\infty \end{cases}$$

وعليه فان

$$P(x > m + r / x > m) = \frac{P(x > m + r)}{P(x > m)} = \frac{1 - P(x \le m + r)}{1 - P(x \le m)}$$

$$= \frac{1 - \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{m+r+1}\right]}{1 - \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}\right]} = \left(\frac{2}{3}\right)^{r}$$

$$= P(x > r - 1) = P(x \ge r)$$

مثال (5-14) : إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل X معطى بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(x+3) & , \ 1 < x < 3 \\ 0 & \text{لقيم x الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب a) إيجاد دالة التوزيع للمتغير X.

b) حساب كل من الاحتمالات التالية:

1) $P(1.3 < x < 2)$ 2) $P(x > 2.5)$ 3) $P(x < 1.5)$

الحل : a) من علاقة دالة التوزيع للمتغير فإن

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{10}(3+t)dt = \frac{1}{10}\left(3t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg]_{1}^{x}$$

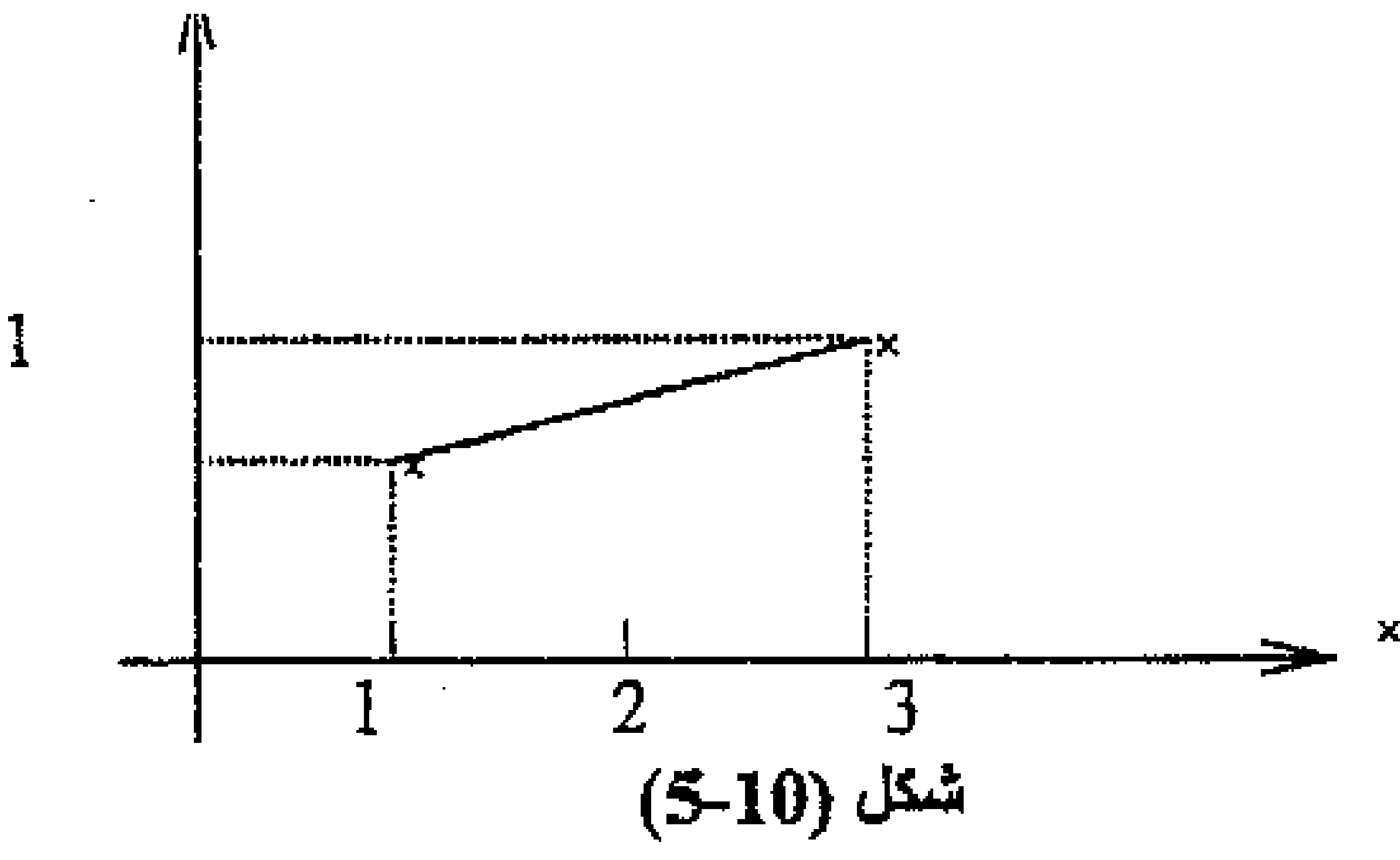
$$= \frac{1}{10}\left[\left(3x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(3 + \frac{1}{2}\right)\right] \qquad \text{وبأخذ العامل المشترك } \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \frac{1}{20}\left[x^2 + 6x - 7\right]$$

وعليه فإنه يمكن كتابة دالة التوزيع على الصورة.

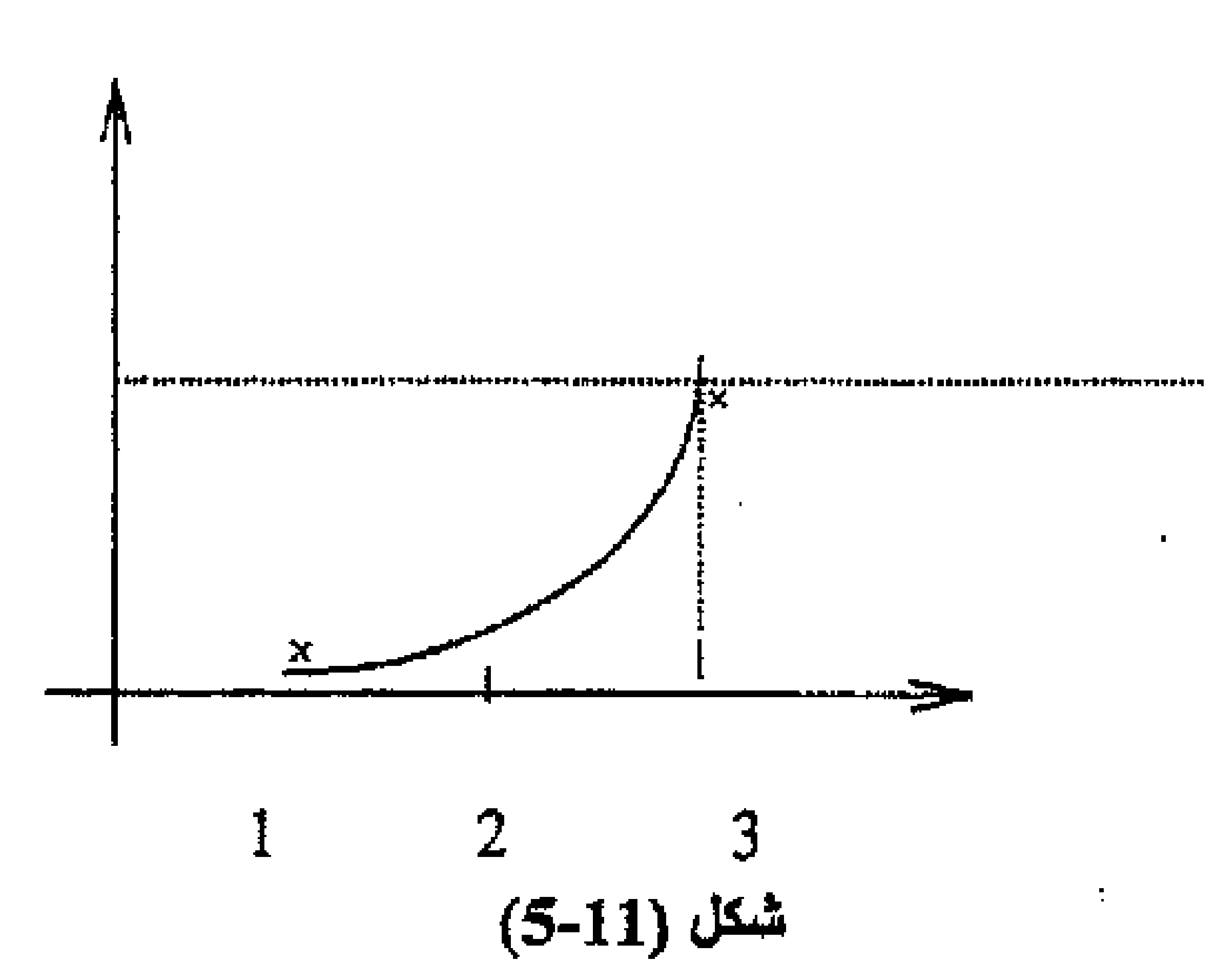
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 1 \\ \frac{1}{20}(x^2 + 6x - 7), & 1 < x < 3 \\ 1 & , x \ge 3 \end{cases}$$

وشكل (5-10) يمثل بيان دالة الكثافة الاحتمالية f(x)



شكل (5-10)

أما الشكل (5-11) فيمثل بيان دالة التوزيع للمتغير العشوائي X.



شكل (5-11)

b) بالاستعانة بدالة التوزيع نجد الاحتمالات التالية:

$$1)\ P(1.3 < x < 2) = F(2) - F(1.3) = \frac{9}{20} = \frac{2.49}{20} = \frac{6.51}{20} = 0.3255$$

$$2)\ P(x > 2,5) = 1 - P(x \leq 2.5) = 1 - F(2.5)$$

$$= 1 - \frac{14.25}{20} = 0.2875$$

$$3)\ P(x \leq 1.5) = F(1.5) = \frac{1}{20}\left[(1.5)^2 + 6(1.5) - 7\right] = \frac{1}{20}\left[2.25 + 9 - 7\right]$$

$$= \frac{4.25}{20} = 0.2125$$

مثال (5-15) : القي حجر نرد و كان المتغير العشوائي يمثل خمسة أضعاف الوجه الظاهر وعلى اعتبار ان القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي قيم فردية أوجد احتمال أن تكون قيمة $x \leq 15$.

الحل : إن للقيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي

$$x = 5i \ , \ i = 1, 2, \ldots , 6$$

ودالة التوزيع الاحتمالية هي :

$$P(X) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , x = 5,10,15,20,25,30 \\ 0 & \text{قيم x الأخرى} \end{cases}$$

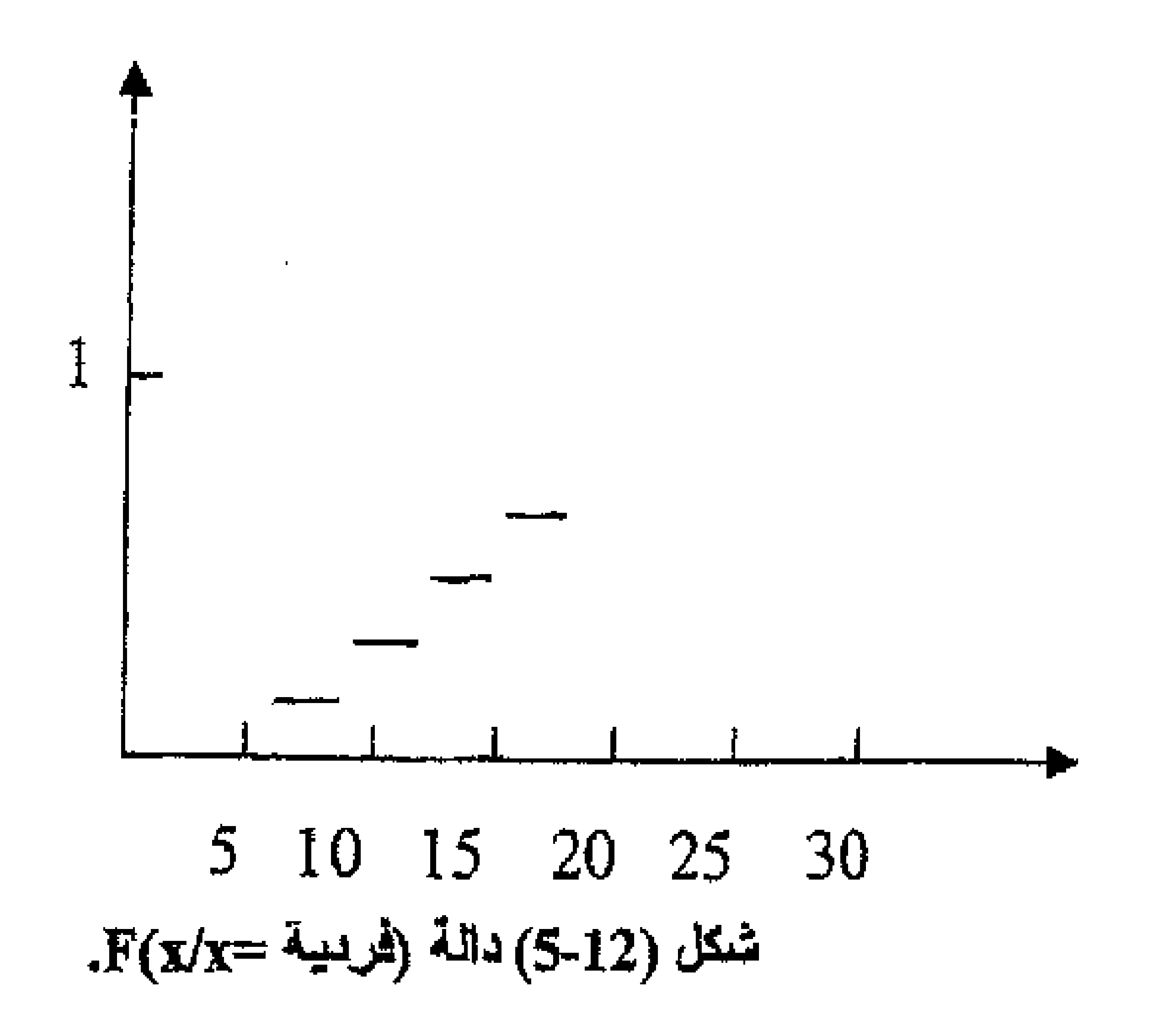
فان احتمال الشرطي المطلوب

$$P[(x \leq 15)/x(\text{فردي})] = \frac{P[(x \leq 15)\cap(x\ \text{فردي})]}{P(x\ \text{فردي})} = F(15/x = \text{فردي})$$

وهنا إذا اعتبرنا الحدث (فردي =x)=A فإن أعلاه يصبح على الصورة

$$F(15/A) = \frac{P[(x=5)\bigcup(x=15)]}{P[(x=5)\bigcup(x=15)\bigcup(x=25)]} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

ويكون بيان الدالة F(x) كما هو مبين في شكل (5-12)



شكل (5-12) دالة (فردية =F(x/x.

وعليه تصبح دالة التوزيع على الصورة التالية:

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x<5\\ \frac{1}{6}(x-4i) & ,x=5,10,15,20,25,30\\ & \quad i=1,2,3,4,5,6\\ 1 & ,x\geq 30\end{cases}$$

مثال (5-16) : لتكن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل f(x) أوجد دالة التوزيع الشرطية F(x/X≤a) وكذلك دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية F(x/X≤a)

الحل : لتكن $x < a$ وعليه فإن

$$F(x/X\leq a)=\frac{P[(X\leq x)\bigcap(X\leq a)]}{P(X\leq a)}=\frac{P(X\leq x)}{P(X\leq a)}=\frac{F(x)}{F(a)}$$

مع اننا نلاحظ أن $[(X\leq x)\bigcap(X\leq a)]=(X\leq x)$

وأما إذا كانت $X \geq a$ ومن كون $[(X\leq x)\bigcap(X\leq a)]=(X\leq a)$ فإنه يمكن كتابة

$$F(x/X\leq a)=\frac{P[(X\leq x)\bigcap(X\leq a)]}{P(X\leq a)}=\frac{F(a)}{F(a)}=1$$

ومن العلاقة (5-16) فإذا أخذت مشتقة $F(x/X\leq a)$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية تصبح

5-9 : الاحتمالات المشروطة ودوال التوزيع لها:

ليكن $f(x)$ هو دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل ولنأخذ الحادث A وإذا كان $P(A) \neq 0$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة للمتغير العشوائي X والذي سنرمز له بالرمز $f(X/A)$يعرف على النحو التالي.

$$f(x/A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P[(X \le X \le X + \Delta X)/A]}{\Delta X}$$

$$f(x/A) = \frac{f(x)}{P(A)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5-14)$$

وإن دالة التوزيع للمتغير العشوائي X هي

$$F(x/A) = \frac{P[(X \le x) \cap \overline{A}]}{P(A)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5-15)$$

وهنا نعني بـ $[(X \le x) \cap A] = \{S_i X(S) \le X\}$

ومن العلاقة (5-14)، (5-15) فإنه يمكن كتابة

$$f(x/A) = \frac{d}{dx} F(x/A) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5-16)$$

إن خواص دالة التوزيع $F(x)$ التي مرت سابقا تطبق على دالة التوزيع المشروطة

a) $\lim_{X \to -\infty} F(x/A) = 0 \;,\; \lim_{X \to +\infty} F(x/A) = 1$

وهنا فإن $-\infty$ هو الحد الأدنى للحادث A، $+\infty$ هو الحد الأعلى للحادث A.

b)
$$F(x_2/A) - F(x_1/A) = P[(x_1 < x \le x_2)/A] = \frac{P[(x_1 < x \le x_2) \cap A]}{P(A)}$$

وكذلك أيضا فإن دالة الكثافة الاحتمالية $f(x/A)$ تحمل نفس خصائص دالة الكثافة الاحتمالية وعليه فإن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/A)dx = F(+\infty/A) - F(-\infty/a) = 1$$

وهنا فإن $-\infty$، $+\infty$ هما الحد الأدنى والحد الأعلى لمنطقة التعريف.

وللمتغيرات العشوائية المنفصلة الدوال الاحتمالية الشرطية ودوال التوزيع الشرطية تعرف بشكل مشابه فالدوال الاحتمالية الشرطية والدوال الاحتمالية ودالة التوزيع الشرطية تحمل نفس خواص دالة التوزيع.

$$F(x/X \le a) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(a)} & , x < a \\ 0 & , x \ge a \end{cases}$$

مثال (17-5) : إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل X معطاة على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{12}x & , 1 < x < 5 \\ 0 & , \text{لقيم X الأخرى} \end{cases}$$

a) أوجد دالة التوزيع الشرطية $F(x/X > 3)$.

b) أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية $f(x/X > 3)$

الحل : a) دالة التوزيع للمتغير العشوائي X هي

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{12} t\,dt = \frac{1}{12} \cdot \frac{t^2}{2}\Big]_1^x = \frac{1}{24}(x^2 - 1)$$

ولأن $x > 3$ فإن

$$F(x/X > 3) = \frac{P[(X \le x) \cap (X > 3)]}{P(X > 3)} = \frac{P(3 < X \le x)}{P(X > 3)}$$

$$= \frac{F(x) - F(3)}{1 - F(3)} = \frac{3F(x) - 1}{2} = \frac{x^2 - 9}{16}$$

وعندما تكون $x \le 3$ فإن

$$F(x/X > 3) = \frac{P[(X \le x) \cap (X > 3)]}{P(X > 3)} = 0$$

b) دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية

$$f(x/X > 3) = \frac{dF}{dx}(X/X > 3) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}x & , 3 < x < 5 \\ 0 & , \text{لقيم X الأخرى} \end{cases}$$

جمع الاحتمالات

ليكن لدينا الأحدث التالية $A_1, A_2, ..., A_n$ وتحقق الشروط التالية :

a) $A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$

b) $A_1 \cup A_2 ...... \cup A_n = S$ فإنه يمكن كتابة العلاقة التالية

$$F(x) = P(A_1).F(x/A_1) + ... + P(A_n)F(x/A_n)$$

5 -10 : دوال التوزيع والاحتمال للتحويل $Y = g(x)$.

إن المتغير العشوائي الذي سنهتم به هو المتغير Y وهو دالة المتغير العشوائي X (سواء كان متصلا أم منفصلا) والذي سنعبر عنه بالصورة

$$Y = g(X) \quad .... (5\text{-}17)$$

$$Y = g(x) \quad .... (5\text{-}18)$$

1- 10- 5 : التحويل في المتغيرات العشوائية المتصلة

إذا كان $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$ فإننا نقول للدالة $g(x)$ بأنـها دالـة متزايدة تمامـا وبالمقابل إذا كان $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ فـإن الدالـة $g(x)$ متناقصـة تمامـا. وفـي الاقترانات الوتيرية فإن لكـل قيمـة مـن قيـم x لـها صـورتـها الوحيدة فـي $g(x)$ وفـي البدايـة لنناقش حالة الدالة الوترية المتزايدة. ولتكن دالــة التوزيـع للمتغير العشـوائي X هـي $F_X(x)$ ودالة الكثافة الاحتمالية هي $f_x(x)$ ولتكن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y هـي $y_i = g(x_i)$ والتي تدل على المتغير العشوائي X والقيـم التـي يأخذهـا هـذا المتغيـر x_i ومـن شـكل (5-14) فإن

$$P(Y \leq y_i) = P(X \leq x_i) \quad .... (5\text{-}19)$$

ومن العلاقة (5-19) فإنه يمكن كتابة

$$F_y^{\backslash}(y) = F_X(x) \quad .... (5\text{-}20)$$

ومن العلاقة (5-18) فإن الدالة العكسية للدالة $g(x)$ هي

$$x = g^{-1}(y) \quad .... (5\text{-}21)$$

وإذا كان المتغير العشوائي X متصلا فإن المتغير العشوائي Y الـذي يـدل عليـه يكـون

متصلا أيضا وإذا أخذنا المشتقة بالنسبة y لكلا طرفي العلاقة (5-20) فإن

$$\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{dF_x(x)}{dx}.\frac{dx}{dy}$$

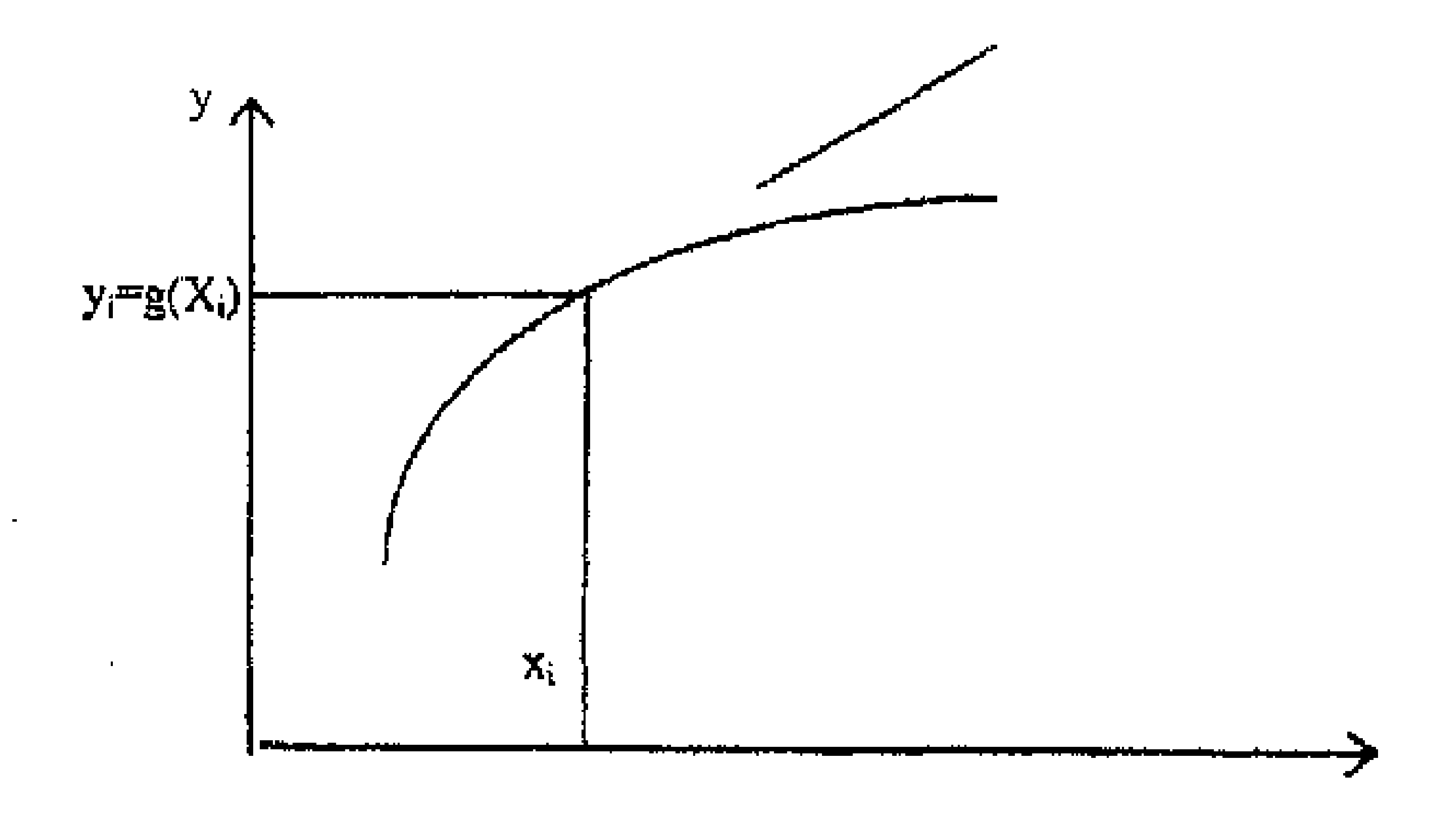
$$f_Y(y)=f_x(x).\frac{dx}{dy}$$

وحسب العلاقة (5-21) فإن

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\left(g^{-1}(y)\right)}{dy}$$

ومن العلاقة (5-21) فإن

$$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y)).\frac{d(g^{-1}(y))}{dy} \quad \text{.............} \quad (5\text{-}23)$$



شكل (5-13) الدالة الوتيرية المتزايدة

مثال (5-18) : إذا أخذنا بالاعتبار المتغير العشوائي X بالمثال (5-14) وكان المتغير العشوائي Y معرف بالعلاقة

$$Y=g\,(x)=5x+3$$

أوجد دالة التوزيع ودالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Y.

الحل : لقد وجدت دالة التوزيع للمتغير العشوائي X على النحو

$$F_X(x)=\frac{1}{20}\left(x^2+6x-7\right)$$

وبما أن الدالة $g(x)$ دالة وتيرية متزايدة وحسب العلاقة (5-21) فإن $x=\frac{y-3}{5}$ ومن

العلاقة (5-23) ينتج أن

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-3}{5}\right).\frac{d}{dy}\left(\frac{y-3}{5}\right) = \frac{1}{10}\left[3+\left(\frac{y-3}{5}\right)\right]\frac{1}{5}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{250}y + \frac{6}{125} & , \quad 8 < y < 18 \\ 0 & \text{لقيم } y \text{ الأخرى.} \end{cases}$$

أما دالة التوزيع للمتغير العشوائي Y فهي.

$$F_Y(y) = \int_8^y \left(\frac{1}{250}t + \frac{6}{125}\right)dt = \frac{1}{500}y^2 + \frac{6}{125}y - \frac{64}{125}$$

وعليه يمكن كتابة دالة التوزيع على الصورة التالية :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \le 8 \\ \frac{1}{500}y^2 + \frac{6}{125}y - \frac{64}{125} & , 8 < y < 18 \\ 1 & , y \ge 18 \end{cases}$$

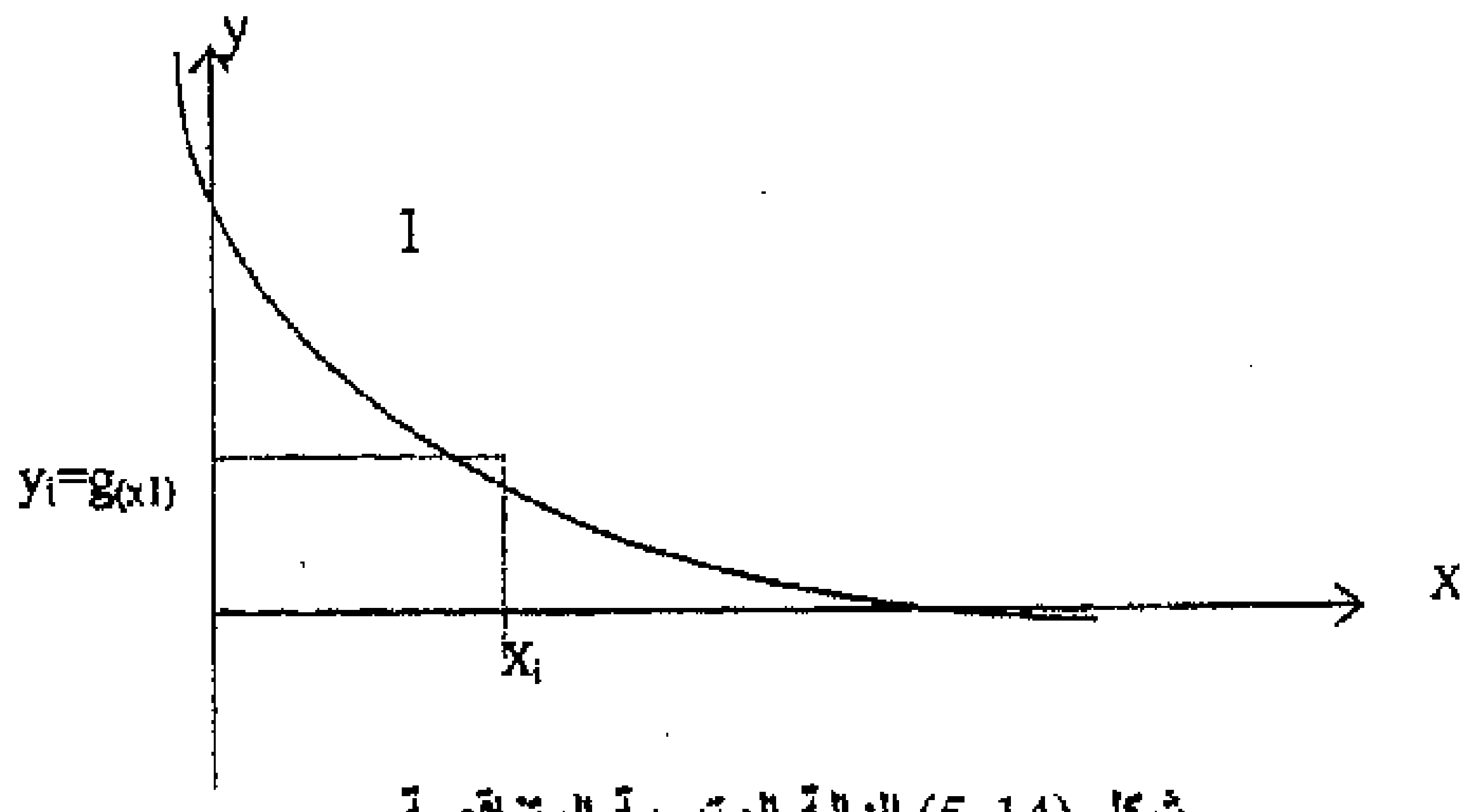
ويمكن إيجاد دالة التوزيع من العلاقة (5-20). على النحو التالي:

$$F_Y(y) = F_X(X) = F_X\left(\frac{y-3}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{20}\left[\left(\frac{y-3}{5}\right)^2 + 6\left(\frac{y-3}{5}\right) - 7\right]$$

$$= \frac{1}{500}y^2 + \frac{6}{125}y - \frac{64}{125}$$

والآن نناقش حالة ما إذا كان $g(x)$ دالة وتيرية متناقصة فلو دققنا في الشكل (15 للاحظنا أن :



شكل (5-14) الدالة الوتيرية المتناقصة.

أن $P(Y\leq y_i)=P(X>x_i)$ وعليه فإن

$$F_Y(y)=1-F_X(x) \quad .... (5\text{-}24)$$

ومرة أخرى $x=g^{-1}(y)$ وعند أخذ المشتقة بالنسبة لـ y لكلا طرفي العلاقة (5-24) فإن

$$f_Y(y)=f_X(x)\frac{dx}{dy}$$

$$f_Y(y)=-f_x(g^{-1}(y)).\frac{d(g^{-1}(y))}{dy} \quad .... (5\text{-}25)$$

وهنا دائما إشارة $\frac{d(g^{-1}(y))}{dy}=\frac{dx}{dy}$ سالبة ولهذا يمكن كتابة العلاقة (5-25) بالصورة التالية.

$$f_Y(y)=-f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dx}{dy}\right| \quad .... (5\text{-}26)$$

مثال (5-19) : إذا أخذنا بعين الاعتبار المتغير العشوائي في المثال (5-14) وليكن المتغير العشوائي $Y = g(X)=-3x$ والمطلوب إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع للمتغير العشوائي Y.

الحل : بما أن الدالة $g(x)$ دالة وتيرية متناقصة وحسب العلاقة (5-21) فإن $x=\frac{-y}{3}$ ومن العلاقة (5-25) أو (5-26) فإنه يمكن الحصول على

$$-\frac{1}{10}\left[3+\left(\frac{-y}{3}\right)\right]\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$f_Y(y)\begin{cases}-\frac{1}{90}y+\frac{1}{10} & , \quad -9<y<-3 \\ 0 & \text{لقيم y الأخرى.}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-9}^{y}\left(-\frac{1}{90}t+\frac{1}{10}\right)dt=-\frac{1}{180}y^2+\frac{1}{10}y+\frac{27}{20}$$

وعليه فإن دالة التوزيع تكتب بالصورة التالية :

وأما دالة التوزيع للمتغير Y فهي :

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & , y\le -9 \\ -\frac{1}{180}y^2+\frac{1}{10}y+\frac{27}{20} & , -9<y<-3 \\ 1 & , y\ge -3\end{cases}$$

وكذلك يمكن إيجاد $F_Y(y)$ من العلاقة (5-24) على النحو التالي.

$$F_Y(y)=1-F_X\left(-\frac{Y}{3}\right)$$

$$=1-\frac{1}{20}\left[\left(-\frac{y}{3}\right)^2+6\left(-\frac{y}{3}\right)-7\right]$$

$$=-\frac{1}{180}y^2+\frac{1}{10}y+\frac{27}{20}$$

2- 10- 5: التحويل في المتغيرات العشوائية المنفصلة:

لنأخذ الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل X والمتغير العشوائي Y والمعرف بالشكل التالي

$$Y=g(X)$$

وإذا كانت القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي x_i والقيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y هي $y_i=g(x_i)$ ولكل قيمة X يوجد قيمة وحيدة لـ g(x) عليه فإن الدالة الاحتمالية لـ Y هي

$$P_Y(y)=P_X(X) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5\text{-}27)$$

وهنا $P_x(x)$ هي الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي X

$$X=g^{-1}(y) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5\text{-}28)$$

والعلاقة أعلاه تعني الدالة العكسية للعلاقة المعرفة في العلاقة (5-21).

مثال (5-20) : ليكن المتغير العشوائي X والمعرف في مثال (5-12) وليكن $Y = 3x + 2$ دالة المتغير العشوائي X. والمطلوب إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية دالة التوزيع للمتغير العشوائي Y.

الحل : من العلاقتين (5-28)، (5-27) فإن الدالة الاحتمالية للمتغير Y هي:

$$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{55}\left(\frac{y-2}{3}\right) \\ \frac{y-2}{165} & , y = 5,8,11,14,17,20,23,26,29,32 \\ 0 & \text{القيم y الأخرى} \end{cases}$$

ومن كون دالة التوزيع للمتغير X هي $F_X(x) = \frac{x(x+1)}{110}$ فإن دالة التوزيع للمتغير Y هي

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < 5 \\ \frac{(y-2)(y+1)}{990} & , y = 5,8,11,14,17,20,23,26,29,32 \\ 1 & , y \geq 32 \end{cases}$$

3- 10 -5 : دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع للمتغير العشوائي $Y=x^2$

لتكن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي f(x) وأن $Y=X^2$ والقيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y هي $y=x^2$ في هذه الحالة فإن كل قيمة تأخذها y هناك قيمتان تأخذهما X. وعليه فإن دالة التوزيع

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)dx$$

وإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Y هي

$$F_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{d}{dy}\left(\sqrt{y}\right) - f_X\frac{\left(-\sqrt{y}\right)d\left(-\sqrt{y}\right)}{dy}$$

وعليه يمكن كتابة الدالة على النحو

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & , y \geq 0 \\ 0 & , y < 0 \end{cases} \quad \text{.................. (5-29)}$$

مثال (5-21) : ليكن المتغير العشوائي المتصل X ودالة كثافته الاحتمالية

$$, \quad f_X(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{X_2}{2}} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

$$Y = X^2$$

أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Y.

الحل : من العلاقة (5-29) فإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Y هي

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} . e^{-\frac{y^2}{2}} & , y > 0 \\ 0 & , y < 0 \end{cases} \quad \text{.............. (5-30)}$$

والعلاقة (5-30) تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع جاما.

تمارين الفصل الخامس

1) إذا كان X هو المتغير العشوائي الذي يأخذ القيم $3, 1, -2$ باحتمالات $0.1, 0.5, 0.4$ والمطلوب هو إيجاد :

a) القيمة المتوقعة لهذا المتغير. b) تباين X.

c) الانحراف المعياري للمتغير X.

2) إذا كان تباين المتغير العشوائي X هو 20 والمطلوب إيجاد :

a) تباين $3X-4$ b) تباين $X-6$.

3) إذا كان المتغير العشوائي X متغيرا منفصلا يأخذ القيم 100، 80، 50 باحتمالات 0.6، 0.1، 0.3 أوجد تباين المتغير العشوائي $Y = \frac{X-80}{10}$.

1) إذا كان المتغير العشوائي المنفصل X يأخذ القيم $(n+m+1)$، $(+m)$، .... ،

2) $(n+2)$ و $(n+1)$ باحتمالات متساوية والمطلوب إيجاد القيمة المتوقعة للمتغير X.

5) لدينا 5 كتب رياضيات، 7 كتب فيزياء، 8 كتب كيمياء سحب كتابين بطريقة عشوائية من بين هذه الكتب وكان السحب دون الاعادة وإذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد كتب الفيزياء الظاهرة في العينة المسحوبة. أوجد القيمة المتوقعة لهذا المتغير.

6) إذا كان لدينا المتغير العشوائي المنفصل X وتوزيعه الاحتمالي $P(X)$ ودالة التوزيع لهذا المتغير $F(X)$ أثبت أن $P(X_i) = F(X_i) - F(X_{i-1})$.

7) كيس به ثلاث كرات بيضاء وسبعة حمراء، سحبت عينة من ثلاث كرات فكان السحب دون الإعادة فإذا كان المتغير العشوائي يمثل الفرق بين عدد الكرات البيضاء والحمراء في العينة والمطلوب إيجاد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي $Y = 5X - 7$,

8) إذا كانت قيم المتغير العشوائي هي $1, 2, 3, \ldots, (m-1), m$ أعداد صحيحة وكان $P(X = X_i) = \frac{2X_i}{K}$ حيث أن K عدد ثابت والمطلوب إيجاد قيمة K.

9) إذا كانت $f(x)$ متصل ممثل بالقاعدة التالية.

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 4x - 1, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{لقيم X الأخرى} \end{cases}$$

فهل $f(x)$ يمثل دالة كثافة احتمالية ؟

10) إذا كان إنتاج مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية وكان المتغير العشوائي X يمثل عمر المصباح بالساعات وكانت دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير معطاة بالعلاقة

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1000}.e^{-\frac{x}{1000}} & , x>0\\ \\ 0 & , x\le 0\end{cases}$$

فإذا سحبت وحدة واحدة من هذا الإنتاج فما احتمال أن يكون عمـر المصبـاح أكثر مـن 1000 ساعة.

11) إذا كانت الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي X معطاة بالعلاقة التالية:

$$P(x)=\begin{cases}K\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & , x=1, 2, 3, \ldots.. \\ \\ 0 & \text{، لقيم X الأخرى}\end{cases}$$

[illegible] معطاة بالعلاقة

$$F(x)=\begin{cases}0 & , x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & , a\le x\le b\\ 1 & , x\ge b\end{cases}$$

والمطلوب إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X.

13) إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل معطى بالعلاقة.

$$f(x)=\begin{cases}kx & , 0\le X\le 1\\ k & , 1<x\le 2\\ 0 & \text{، لقيم X الأخرى}\end{cases}$$

a) أوجد قيمةk.

b) بالتعويض عن قيمة k الموجودة احسب $P(x\ge 1.5/0.5\le x\le 1.7)$

14) إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل X معطاة بالعلاقة

$$f(x)=\begin{cases}2x & , 0<x<1\\ \\ 0 & \text{، لقيم X الأخرى}\end{cases}$$

والمطلوب إيجاد قيمة b التي تحققها المساواة. $P(X\le b)=2P(X>b)$

15) الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل X معطاة بالعلاقة

$$P(x)=\begin{cases}2kx & , x=1,2,3.\\ k(1+2x) & , x=4,5,6,7.\\ 0 & \text{لقيم X الأخرى ،}\end{cases}$$

والمطلوب إيجاد.

a) إيجاد قيمة الثابت k.

b) بالتعويض عن قيمة k الموجودة أوجد $P(x=2), P(x=6), P(2<x<5)$.

16) إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل معطاة بالعلاقة

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{56}(x+3) & , 0\le x\le 8\\ \\ 0 & \text{لقيم X الأخرى}\end{cases}$$

a) أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي X.

b) بمساعدة دالة التوزيع أوجد الاحتمالات التالية $P(2<x\le 5), P(x)3), P(|x|\le 3)$

17) إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل X معطاة بالعلاقة.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\alpha} & , -\alpha<x<\alpha\\ \\ 0 & \text{لقيم X الأخرى}\end{cases}$$

والمطلوب إيجاد قيمة الثابت α الذي يحقق المساواة $P(x<1)=\frac{3}{4}$.

18) إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل معطى بالعلاقة

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x & , 0\le x\le 1\\ \frac{1}{3} & ,1<x\le 3\\ 0 & \text{لقيم X الأخرى}\end{cases}$$

أوجد دالة التوزيع لهذا المتغير العشوائي .

19) دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل X معطاة بالعلاقة

$$f(x)=\begin{cases} k\sin 2x & ,0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{لقيم X الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد

a) قيمة الثابت k.

b) بالتعويض عن قيمة k الموجودة أوجد دالة التوزيع لهذا المتغير X.

c) أوجد الاحتمالات التالية $P\left(\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{3}\right)$ و $P\left(x\le \frac{\pi}{4}\right)$

20) دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل X هي

$$f(x)=\begin{cases} 2x & ,\ 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{لقيم Xالأخرى} \end{cases}$$

أوجد دالة التوزيع الشرطية $F(x/0.2<x\le 0.7)$

21) إن دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل معطاة بالعلاقة التالية

$$P(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & ,\ x=1,\ 2,\ 3,\dots\dots \\ 0 & \text{لقيم xالأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد.

a) دالة التوزيع الشرطية $F(X/X<5)$.

b) الدالة الاحتمالية الشرطية $P(X/X<5)$.

22) إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل X معطاة بالعلاقة

$$f(x)=\begin{cases} 2x & ,\ 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{لقيم x الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع للمتغير العشوائي $Y=3x$.

الفصل السادس
التوزيعات الاحتمالية الهامة

الفصل السادس

التوزيعات الاحتمالية الهامة

6 - 1: التوزيعات المنفصلة :

6 – 1 – 1

: توزيع بيرنوللي : Bernolli Distribution :

في تجربة ما إذا كانت النتائج المتوقعة هي النجاح والفشل ورمز لاحتمال النجاح بالرمز P فإن احتمال الفشل هو q =1-P وعليه فإن نتائج هذه التجربة تخضع لتوزيع بيرنوللي والذي هو على النحو التالي :

$$P(x;P) = \begin{cases} P & , \quad x = 1 \\ 1 - P & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad \text{لقيم x الأخرى} \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots (6\text{-}1)$$

ودالة العزوم المولدة للتوزيع هي :

$$\begin{aligned} Mx(t) &= \sum_i e^{txi}.P(xi) \\ &= (1 - P) + e^t.P \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots (6\text{-}2)$$

والعزم المولد الأول هو $M_x^{\prime}(t) = P.e^t$

والعزم المولد الثاني هو $M_x^{\prime\prime}(t) = P.e^t$

وعليه فإن $E(X) = P = \mu$

$E(X^2) = P$

وعليه فإن التباين $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = P - P^2$

$V(X) = P(1 - P) = P.q$

مثال (6-1) : في تجربة إلقاء قطعة نقود إذا رمزنا لظهور كتابة بالصفر ولظهور الصورة بالرمز 1 يعني X (كتابة) = 0 , X (صورة) = 1 اكتب الدالة للمتغير X .

الحل : نعلم أن احتمال ظهور صورة في هذه التجربة = $\frac{1}{2}$ وظهور كتابة هو $\frac{1}{2}$

وعليه فإن الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع هي :

$$P\left(X_i \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad x=1 \\ \frac{1}{2} & , \quad x=0 \\ 0 & \text{لقيم x الأخرى} \end{cases}$$

2 - 1 – 6 : توزيع ذات الحدين :

تحت نفس الشروط إذا أجريت تجربة وفي كل محاولة ينتج أحد النتائج المستقلة وكان احتمال النتيجة الأولى هو P، فإن احتمال النتيجة الأخرى هو 1-P.

وعليه فإن الدالة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين هو : ... (6-3)

$$b(x,n,P) = \begin{cases} \binom{n}{x}.(P)^x(1-P)^{n-x} \\ 0 \end{cases}$$

وسنرمز لتوزيع ذات الحدين بالرمز b(x,n,P)

وحتى تكون التجربة تجربة ذات حدين فإنه يجب تحقيق الشروط التالية :

1) يوجد نتيجتان للتجربة اما النجاح او الفشل:
2) احتمال النجاح طيلة فترة التجربة ثابت:
3) عددمرات التجربة مستقلة عن بعضها البعض:

مثال (2-6): به 5 كرات سوداء وعشرة حمراء سحبت ثلاث كرات دون إعادة من هذا الكيس.

a) احسب احتمال ظهور كرة سوداء من بين الثلاث كرات المسحوبة.
b) احسب احتمال ظهور كرة سوداء أو أكثر من بين الكرات المسحوبة.

الحل : نلاحظ أن التجربة تحقق تجربة ذات الحدين ولنفرض أن عدد الكرات السوداء المسحوبة يمثل المتغير العشوائي X، $P = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, n = 3$ وعليه فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو

$$P\left(x;3,\frac{1}{3}\right) = \begin{cases} \binom{3}{x}.\left(\frac{1}{3}\right)^x.\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-x} & , \quad x = 0,1,2,..... \\ 0 & \text{لقيم x الأخرى} \end{cases}$$

a) من تعريف دالة التوزيع الاحتمالي :

$$Px = 1 = P\left(1,3,\frac{1}{3}\right) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

b) لإيجاد احتمال ظهور كرة سوداء أو أكثر فإن الاحتمال المطلوب :

$$P(X \geq 1) = P\left(1;3,\frac{1}{3}\right) + P\left(2;3,\frac{1}{3}\right) + P\left(3,3,\frac{1}{3}\right)$$

$$= \binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{3}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1 \quad (1)$$

$$= \frac{12}{27} + \frac{6}{27} + \frac{1}{27} = \frac{19}{27}$$

(2) طريقة أخرى :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

مثال (6-3) : إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل x معطاة على النحو

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & \text{لقيم x الأخرى} \end{cases}$$

يراد اختيار خمسة قيم له بطريقة عشوائية ما احتمال أن يكون اثنان منها على الأقل أكبر من 1 :

الحل : إن احتمال أن تكون x أكبر من 1 هو :

$$P(x > 1) = \int_1^2 \frac{1}{2}x\,dx = \left.\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

واحتمال أن تكون x أقل من 1 هو :

$$P(x < 1) = 1 - P(x > 1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

6-1-3: توزيع بوا سون Poisson Distribution :

تعريف : إذا كان لدينا المتغير العشوائي المنفصل X ويأخذ القيم $x = 0,1,2,3, \ldots\ldots$ وكانت الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع هي :

$$P(X = x) = \begin{cases} P(x,\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x\,!} \\ 0 & \text{لقيم x الأخرى} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (6\text{-}4)$$

عندئذ نقول عن هذا التوزيع توزيع بواسون وله من الخصائص التالية :

a) $$\sum_{X=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}.e^{\lambda} = 1$$

b) العزم المولد لهذا التوزيع $M_x(t)=\sum_{x=0}^{+\infty} e^{t.x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

$$M_x(t)=e^{\lambda(e^t-1)} \quad \ldots\ldots\ldots (6\text{-}5)$$

c) القيمة المتوقعة للمتغير X $\qquad E(X)=\lambda$

وتباين المتغير X $\qquad V(X)=\lambda$

نظرية (6-1) : تحت الشروط المذكورة أدناه فإن توزيع ذات الحدين الذي معلماته n, P يتحول إلى توزيع بواسون بمعلمة $\lambda = nP$ والشروط هي :

a) أما P أو 1-P يجب أن تقترب نحو الصفر والأخرى نحو الواحد الصحيح.

b) أن يكون $n \to \infty$ $(n \geq 30)$

البرهان : ليكن توزيع ذات الحدين الذي معلماته n, P ويكتب على النحو التالي :

$$P(x;n,P)=\binom{n}{x}.P^x(1-P)^{n-x}$$

أو

$$P(x;n,P)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-x+1)}{x!}.P^x(1-P)^{n-x} \quad \ldots (6\text{-}6)$$

وبما أن $\lambda = Pn$- من هنا نستنتج أن

$$P=\frac{\lambda}{n}, 1-p=\frac{n-\lambda}{n}$$

وبوضع هذه القيمة بدلاً من P في (6-6) وكذلك بدلاً من 1-P نصل إلى :

$$P(x;n,P)=\frac{n(n-1)\ldots\ldots\ldots(n-x+1)}{n^x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}\left[\frac{n(n-1)\ldots\ldots\ldots(n-x+1)}{n^x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right]$$

وبأخذ النهاية للطرف الأيمن عندما $n \to \infty$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-x+1)}{n^x}\left(\frac{1-\lambda}{n}\right)^{n-x}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

وعليه فإنه يمكن كتابة :

$$\lim_{n\to\infty} P(x;n,P) = P(x,\lambda)$$

مثال (6-4) : ليكن المتغير العشوائي X المنفصل يخضع لتوزيع بواسون وفي هذا التوزيع إذا كان $P(x=2)=\frac{2}{3}P(x=1)$ فأوجد $P(x\geq 3)$

الحل : لإيجاد معلمات التوزيع نستفيد من المساواة المعطاة :

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}=\frac{2}{3}e^{-\lambda}\frac{\lambda}{1!}\Rightarrow \lambda^2=\frac{3}{4}\lambda \Rightarrow \lambda=\frac{4}{3},\lambda=0$$

وعليه فإن الدالة الاحتمالية للتوزيع هي :

$$P(X,\lambda)=\begin{cases} e^{-\frac{4}{3}}\dfrac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{x\,!} & , \quad x=0,1,2,\ldots\ldots \\ 0 & \text{لقيم x الأخرى} \end{cases}$$

ويكون الاحتمال المطلوب.

$$P(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)=1-\sum_{x=0}^{2}e^{-\frac{4}{3}}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{x\,!}$$

6-1-4: التوزيع الهندسي :

تعريف : التوزيع الهندسي هو التوزيع الموسع للمتغير العشوائي الذي يخضع لتوزيع ذات الحدين ، وتكون دالته الاحتمالية هي :

$$P(1;x,P)=\binom{x}{1}P(1-P)^{x-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (6\text{-}7)$$

هي دالة تمثل x ضعف دالة التوزيع الهندسي وعلية فإن الدالة الاحتمالية للتوزيع الهندسي.

$$P(x;P)=\frac{P(1;x,P)}{x}$$

وتصبح على النحو التالي :

$$P(x,P)=\begin{cases} P(1-P)^{x-1} \\ 0 & \text{لقيم x الأخرى} \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ (6\text{-}8)$$

ولكي نجد الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي X نجد أولا دالة العزوم المولدة للمتغير X

$$Mx(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} P(1-P)^{x-1}$$

$$= \frac{P.e^{t}}{1-(1-P)e^{t}} \quad .... (6-9)$$

ومنه نجد أن $E(X) = \frac{1}{P}$

وأن

$$V(X) = \frac{1-P}{P^{2}}$$

ودالة التوزيع للمتغير العشوائي X هي :

$$F(X) = \sum_{n=1}^{x} P(1-P)^{n-1} = P\frac{1-(1-P)^{x}}{P}$$

ويمكن كتابتها بصورة أخرى على النحو :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 1-(1-P)^{x} & , \quad x = 0,1,2,..... \\ 1 & , \quad x \to +\infty \end{cases} \quad ..... (6-9)$$

مثال (6-5) : كيس بـه 8 كـرات بيضـاء، 4 كـرات سـوداء سـحبت كـرة مـن الكـيس شـرط الإرجاع والمطلوب :

a) إذا كان x يمثل عدد السحبات لسحب كرة بيضاء. أوجد القيمة المتوقعة والتبـاين ثـم دالة التوزيع للمتغير العشوائي X.

b) احتمال ظهور كرة بيضاء في المرة الأولى في السحبة الخامسة.

الحل : المتغير العشوائي X له توزيع هندسي حيث $P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ أي أن P تمثل احتمال سحب كرة بيضاء وعليه فإن :

$$P\left(x, \frac{2}{3}\right) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{x-1} & , \quad x = 1,2,...... \\ 0 & \text{القيم x الأخرى} \end{cases}$$

وتكون القيمة المتوقعة للمتغير X هي :

$$E(X)=\frac{1}{P}=\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{3}{2}$$

أما تباين المتغير العشوائي X فهو :

$$V(X)=\frac{1-P}{P^2}=\frac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

أما دالة التوزيع لهذا المتغير :

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \ x<1 \\ 1-\left(1-\frac{2}{3}\right)^x & , \ x=1,2,3, \ ..... \\ 1 & , \ x\to\infty\end{cases}$$

b) احتمال ظهور كرة بيضاء في المرة الأولى في السحب الخامس.

$$P\left(5,\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{5-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{2}{243}$$

6-1-5: توزيع ذات الحدين السالب :

إن دالة التوزيع الاحتمالية لهذا المتغير X هي.

$$.p(x,k,p)=\begin{cases}\binom{x-1}{k-1}P^k(1-P)^{x-k}, x=k,k+1,.......(6-10) \\ 0\end{cases}$$

$$M_X(t) = \sum_{x=k}^{+\infty} e^{tx} \binom{x-1}{k-1} . P^k (1-P)^{x-k}$$

$$M_X(t) = \frac{e^{tk} . P^k}{\left[1-(1-P)e^t\right]^k} \qquad \dots\dots\dots (6\text{-}11)$$

القيمة المتوقعة لهذا المتغير $E(X) = \frac{k}{P}$

تباين المتغير $V(X) = \frac{k(1-P)}{P^2}$

ويسمى توزيع ذات الحدين السالب بتوزيع باسكال :

مثال (6-6) : ألقيت قطعة نقود حتى ظهور صورتين فإذا علم أن عدد مرات الإلقاء كانت أكثر من ثلاث رميات احسب الاحتمال الشرطي لإلقاء أكثر من ستة رميات.

الحل : إن دالة الاحتمال المتعلقة بعدد الرميات هي :

$$P(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{2-1}\left(\frac{1}{2}\right)^x & , \quad x = 2,3,4, \dots\dots \\ 0 & \text{لقيم x الأخرى} \end{cases}$$

وللأحداث {أكثر ثلاث رميات} = A ، {أكثر من ست رميات} = B، {أكثر من ستة رميات} = $A \cap B$ فإن الاحتمال المشروط.

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\sum_{x=7}^{+\infty}\binom{x-1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}{\sum_{x=4}^{+\infty}\binom{x-1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}$$

$$=\frac{1-\sum_{x=2}^{6}(x-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}{1-\sum_{x=2}^{3}(x-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}$$

6-1-6: التوزيع الهيبرجيومتري :

لتوضيح هذا التوزيع نتناول مثالا بصيغته العامة :

ليكن كيس فيه N كرة منها r كرة بلون معين، سحب من هذا الكيس n كرة وكان السحب دون الإعادة فإذا أردنا حساب احتمال ظهور x بلون معين فإن هذا الاحتمال يوجد بالاستعانة بالتوزيع الهيبرجيومتري ومعلمات هذا التوزيع N, n, r ودالته الاحتمالية :

$$P(x;N,n,r)=\begin{cases}\dfrac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} & , \quad x=0,1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{لقيم x الأخرى}\end{cases} \qquad \ldots.(6\text{-}12)$$

ولصعوبة إيجاد دالة العزم المولدة للمتغير العشوائي x فلن نعطي إيجاده هنا.أما القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي x الذي يتبع توزيع الهيبرجيومتري $E(x)=\frac{nr}{N}$

وأما تباينه
$$V(x)=\frac{nr(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

6-2: التوزيعات المتصلة :

6-2-1: التوزيع الطبيعي :

يعتبر التوزيع الطبيعي أحد أهم التوزيعات المتصلة ودالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع:

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma 2}} \quad ,-\infty<x<+\infty \qquad \ldots\ldots\ldots(6\text{-}13)$$

ونقول في هذه الحالة أن المتغير العشوائي X يمتلك توزيعاً طبيعياً. وسنعبر عن التوزيع الطبيعي الذي معلماته σ و μ حيث $\sigma > 0$، $-\infty > \mu > +\infty$ بالرمز $N(\mu,\sigma^2)$
أما بالنسبة لدالة العزم المولد للمتغير العشوائي Xفهي :

$$M_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} . e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad \ldots\ldots\ldots (6\text{-}14)$$

وبافتراض التحول $y = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow -\mu = \sigma y \Rightarrow x = \mu + \sigma y$ وبأخذ المشتقة لكلا الطرفين :

$$\Rightarrow dx = \sigma dy$$

وعليه فإن :

$$Mx(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(\sigma y+\mu)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma ty+\mu t} . e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\sigma - \frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\sigma t - y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e.^{\mu t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{+\sigma^2 t^2 - \sigma^2 t^2 + 2\sigma t + y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e.^{\mu t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} . e^{\frac{(\sigma^2 t^2 - 2\sigma t + y^2)}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e.^{\mu t} . e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} . e^{\frac{-(y-\sigma t)^2}{2}} dy$$

$$Mx(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots (6\text{-}15)$$

لأن $\int_{-\infty}^{+\infty} . e^{\frac{-(y-\sigma t)^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$

ولإيجاد الوسط الحسابي $\mu = E(x)$ باستخدام دالة العزم المولد فإننا نأخذ المشتقة الأولى لدالة العزم المولد ثم نأخذ المشتقة عند $t = 0$ فنحصل على القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) أي أن :

$$E(x) = M_x^1(0) = e^{\mu t} + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \mu + \frac{2\sigma^2 t}{2} \Big|_{t=0}$$

$$E(x) = e^{0+0}(\mu + 0) = 1.\mu = \mu.$$

أما إذا أرنا إيجاد تباين المتغير العشوائي x فإننا نجد أولاً المشتقة الثانية للعلاقة (6-15).

$$E\left(x^2\right) = M_x^{\backslash\backslash}(0) =$$

وعليه فإن التباين يمكن أن نجده من العلاقة :

$$\sigma^2 = E\left(x^2\right) - [E(x)]^2 = \sigma^2$$

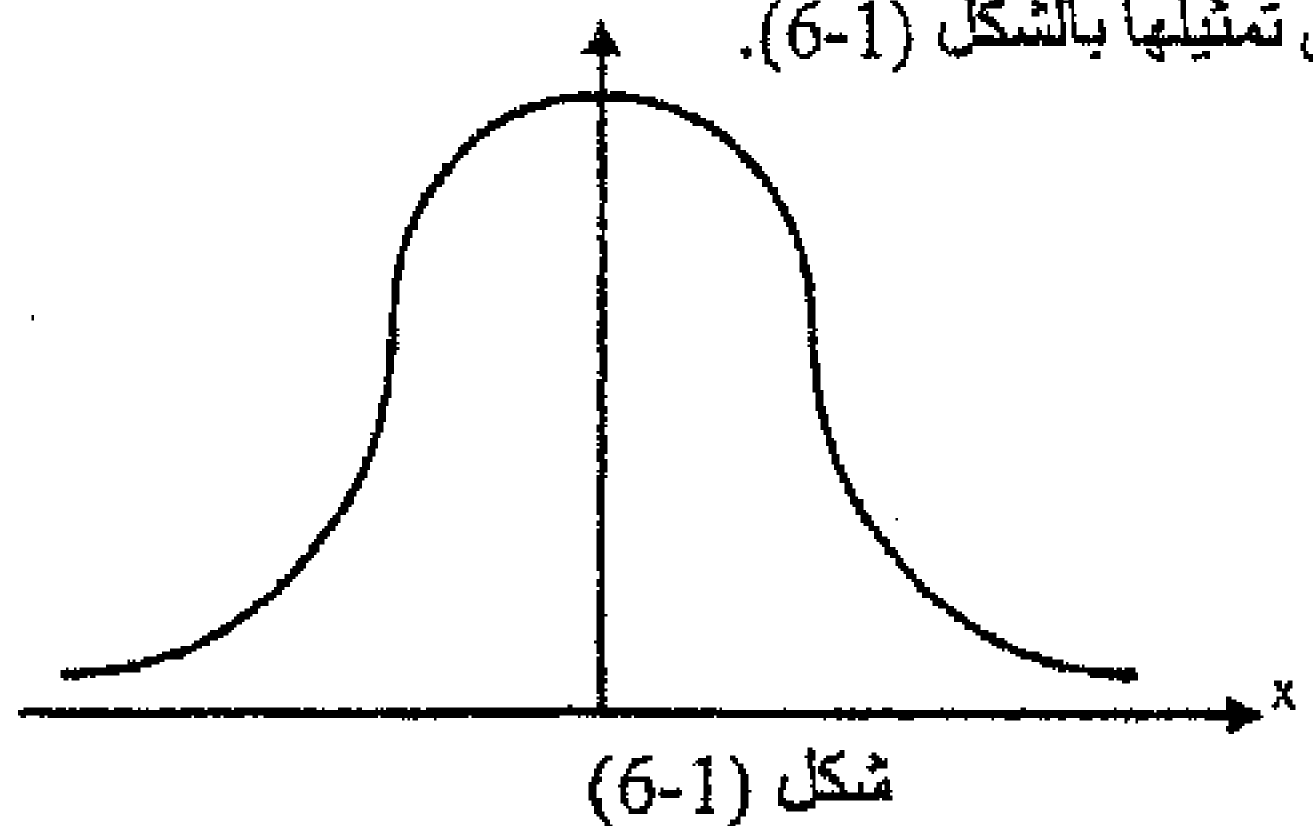
التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي) :

إذا كانت الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي دالة التوزيع الاحتمالي للتوزيــع الطبيعـي المعياري (القياسي) N (0,1) فإن دالة الكثافة للمتغير العشوائي X :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad -\infty < x < +\infty \qquad \ldots\ldots\ldots (6\text{-}16)$$

$\Phi(x)$

والعلاقة (6-14) يمكن تمثيلها بالشكل (6-1).



شكل (6-1)

ونلاحظ من الشكل بأن المساحة متماثلة حول الوسط يعني :

$$\Phi(-x) = \Phi(x) \qquad \ldots\ldots\ldots (6\text{-}17)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)dx = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (6\text{-}18)$$

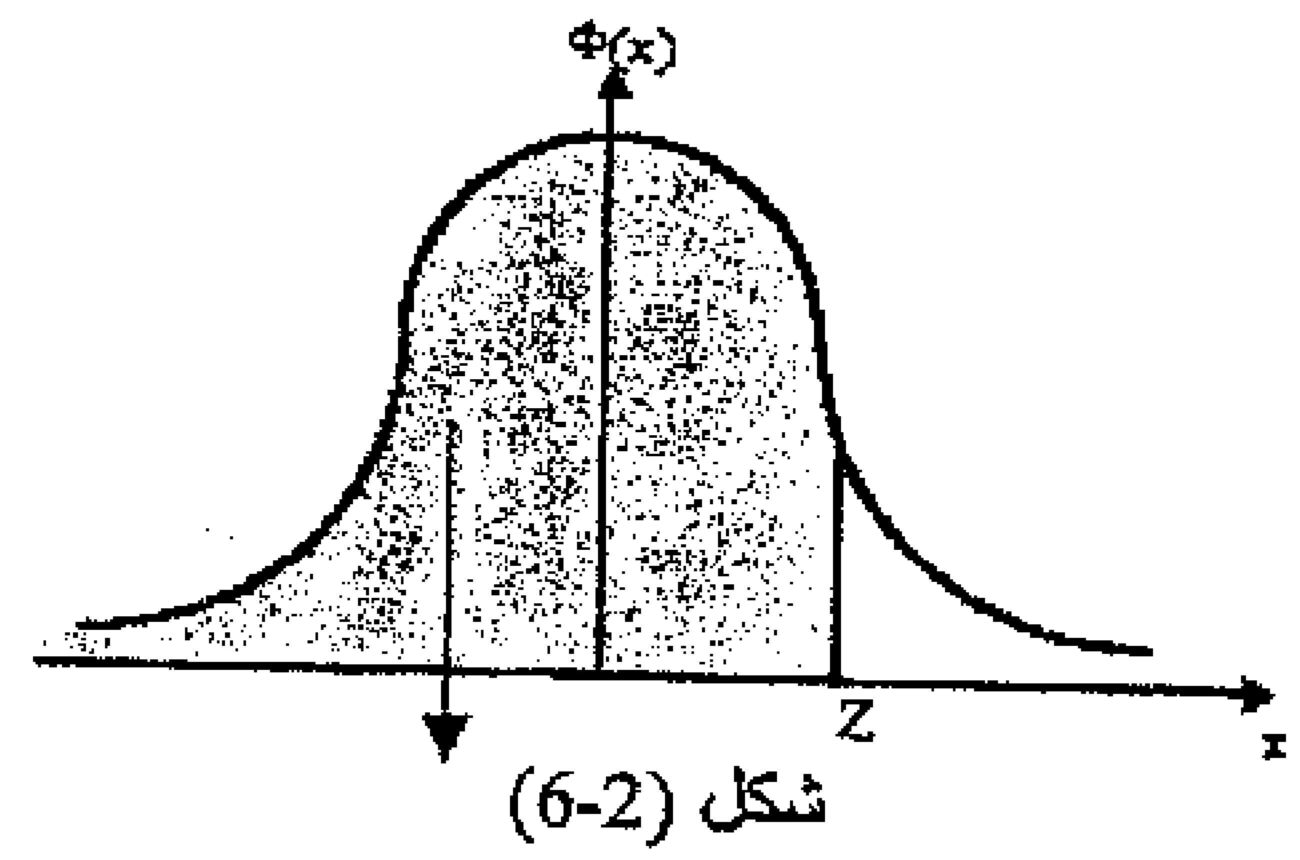
إن دالة التوزيع للمتغير العشوائي X الذي له توزيع طبيعي معياري (قياسي) هو :

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \Phi(x)dx \qquad \ldots\ldots\ldots (6\text{-}19)$$

ومن العلاقتين (6-16) ، (6-17) فإن :

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

وقيمة $\Phi(z)$ أي المساحة تحت المنحنى المحدد بقيمة z المعيارية يستخرج من الجدول ولا داعي للدخول في معادلات لا طائل لها. وقيمة $\Phi(z)$ موضحة كما في شكل (6-2) فإن المنطقة المظللة :



شكل (6-2)

هي المساحة المحددة بقيمة z.

ولإيجاد دالة التوزيع للمتغير العشوائي X الذي يمتلك التوزيع $N(\mu,\sigma)$ فإن :

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}dt$$

وعلى فرض أن $y=\frac{t-\mu}{\sigma}$ فإن $t=\sigma y+\mu$ وباخذ المشتقة لكلا الطرفين فـإن $dt = \sigma dy$

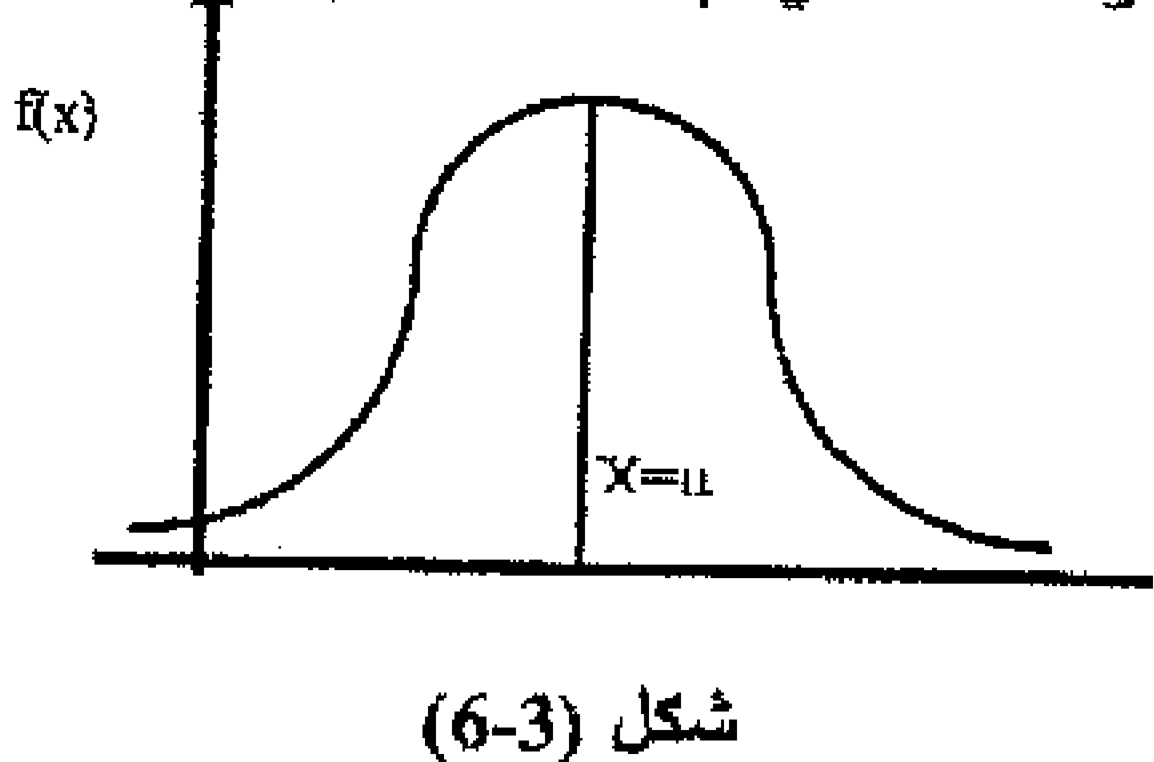
$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ (6\text{-}20)$$

وعليه فإنه يمكن كتابة ، $P(a<x\leq b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$$P(x>b)=1-P(x\leq b)=1-\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right),$$

خواص التوزيع الطبيعي :

a) التوزيع متماثل حول الوسط الحسابي μ والشكل (6-3) يمثل دالة الكثافة الاحتمالية .



شكل (6-3)

b) يمكن إثبات أن $-(x-\mu)^2/2\sigma^2_{dx=1}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

ولإثبات ذلك لنأخذ $y = \frac{(x-\mu)}{\sigma} = dy = dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} {}^{-y^2/2} dy \qquad \ldots\ldots\ldots (6\text{-}21)$$

ولنفرض أن التكامل في (6-21) هو A فإن :

$$A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-y^2/2} dy . \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-z^2/2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(y^2-z^2)\backslash 2} dydz.$$

ولحل مثل هذا التكامل الثنائي (المتضاعف) نستخدم الإحداثيات القطبية $y = r\sin\alpha$, $. z = r\cos\alpha$

وهنا فإن $o<r<+\infty$, $dydz = rdrd\alpha$, $0 < \alpha\ 2\pi$

$0<\alpha<2\pi$

وعليه فإن :

$$A^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r.e^{-r^2/2} drd\alpha.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \left(-e^{-r^2/2} \Big|_0^{+\infty} \right) d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\alpha$$

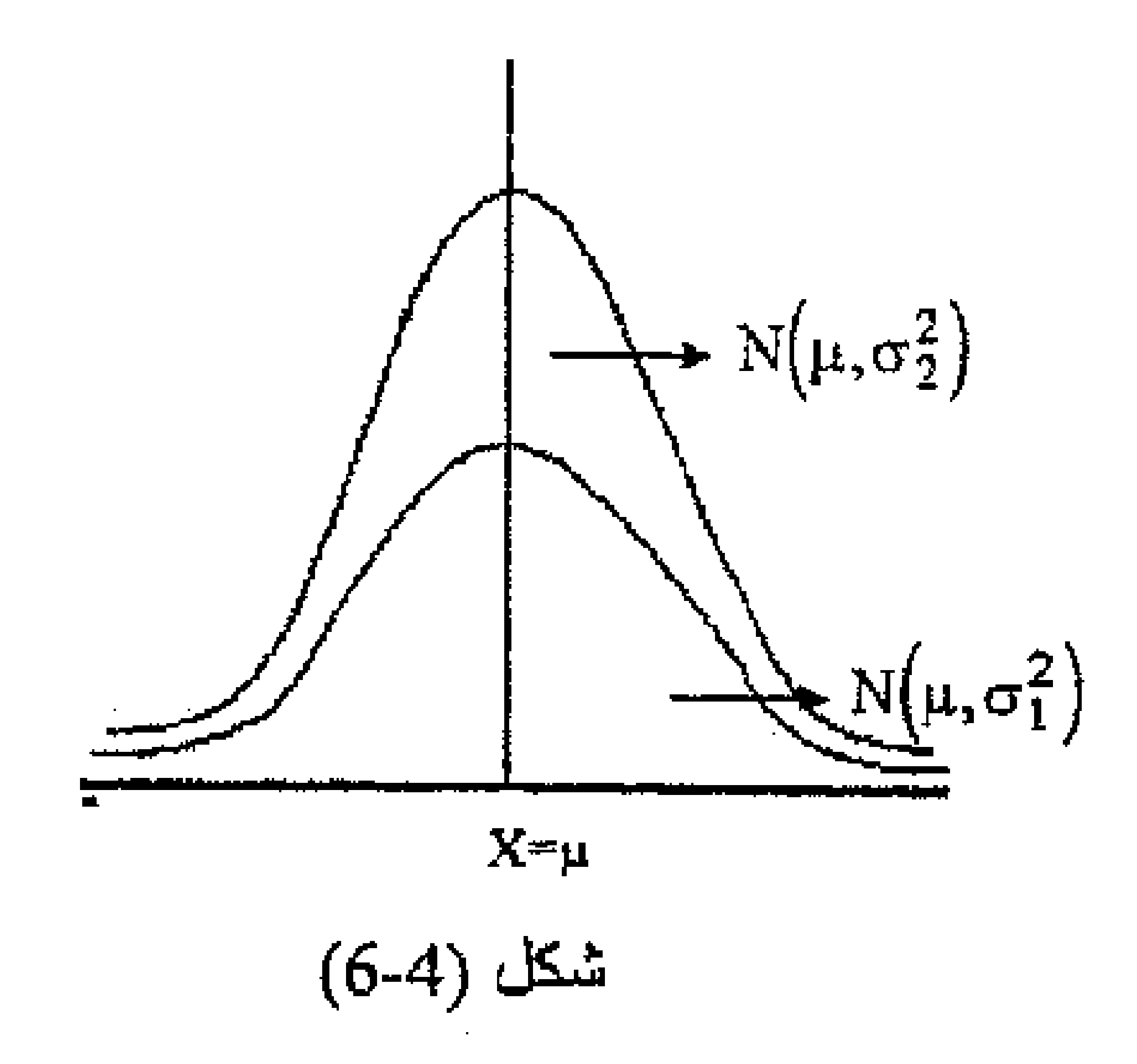
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \alpha]_0^{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2\pi - 0) = 1$$

وينتج أن $A = 1$ وهو المطلوب.

c) التوزيع الطبيعي هو التوزيع الذي يمكن أن يقاس.

d) التوزيع متصل.

e) إذا كان المتغير العشوائي X_1 يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma_1^2)$ ، والمتغير العشوائي x يتبع $N\left(\mu, \frac{2}{\sigma}_2\right)$ وكان $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ فإن شكل(6-4)يوضح سلوكية كل التوزيعين حيث أن لتوزيع ذو الأكثر تباينا يكون أكثر تفرطحا كما واضح من الشكل :



شكل (6-4)

مثال (6-7) : إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي $\mu = 2$ ، $\sigma = 2$ والمطلوب إيجاد.

$p(0 \le x \le 3)$ (a $\quad p|x \le 1|$ (b $\quad p(-1 \le x \le 1/0 \le x \le 3)$ (c

الحل : نحول القيم المعطاة إلى قيم معيارية ومن ثم حساب الاحتمالات المطلوبة من الجدول المعد لذلك على النحو.

(a)
$$P(0 \le x \le 3) = \Phi\left(\frac{3-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-2}{2}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(-1) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \Phi(1) - 1 = 0.5328$$

(b)
$$P(|x| \le 1) = P(-1 \le x \le 1) = \Phi\left(\frac{1-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-2}{2}\right)$$
$$= \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.2417$$

(c)
$$P(-1 \le x \le 1/0 \le x \le 3) = \frac{P(-1 \le x \le 1)}{P(0 \le x \le 3)} = \frac{\Phi\left(\frac{-1-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-2}{2}\right)}{0.5328}$$
$$= \frac{0.1498}{0.5328} = 0.2811$$

مثال (6-8) : إذا كان لدينا المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي $\mu = 300$ وانحرافه المعياري $\sigma = 10$ أوجد قيم الثوابت a, b بحيث يحقق العلاقة $P(a<x<b) = 0.90$ وبحيث يكون متماثل حول الوسط الحسابي.

الحل : لنأخذ $a = \mu - k$ ، $b = \mu + k$ وعليه فإن :

$$P(a < x < b) = P(\mu - k < x < \mu + k) = P(300 - k < x < 300 + k)$$
$$= \Phi\left(\frac{300 + k - 300}{10}\right) - \Phi\left(\frac{300 - k - 300}{10}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{k}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-k}{10}\right) = 2\Phi\left(\frac{k}{10}\right) - 1 = 0.90$$
$$= 2\Phi\left(\frac{k}{10}\right) = 1 + 0.9 \Rightarrow \Phi\left(\frac{k}{10}\right) = \frac{1.9}{2} = 0.95$$
$$k = 16.5$$

ومنه فإن $a = \mu - k = 300 - 16.5$
$= 283.2$
$b = \mu + k = 300 + 16.5 = 316.5$

نظرية دموفر - لابلاس :

إذ أخذنا بعين الاعتبار المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع ذات الحدين فإنه كلما كبرت قيمة n فإن التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعي بحيث أن $\mu = n.P$ ، $\sigma^2 = nP\ (1\text{-}P)$ على النحو التالي :

$$P(x = x) = \binom{n}{n}.P^x(1-P)n - x \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi nP(1-P)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right)^2} \quad \ldots(6\text{-}20)$$

ومن العلاقة (6-20) فإن توزيع المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع ذات الحدين يقترب من التوزيع الطبيعي $N(nP, nP(1\text{-}P))$ وبالاستفادة من العلاقة (6-20) نصل إلى أن :

$$P(X \geq x) = F(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-nP}{\sqrt{n.P.(1-P)}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{x - nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right) \quad \ldots\ldots(6\text{-}21)$$

وتسمى النتيجة (6-20) لتوزيع ذات الحدين بأنها تقريب دموفر - لابلاس. ويستخدم هذا التقريب في الحياة العملية بشكل متكرر ولإيجاد الاحتمالات التي تخضع لتوزيع ذات الحدين نستخدم جداول التوزيع الطبيعي القياسي.

ومن 6-21 فإن :

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \sum_{x=x_1}^{x2} \binom{2}{x} P^x.(1-P)^{n-x}$$
$$\cong \Phi\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{nP(1-P)}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{nP(1-P)}}\right)$$

مثال (6-9) : ألقي حجر نرد 2000 مرة إذا كانت x تمثل عدد مرات ظهور الرقم 2 على الوجه العلوي . أوجد $P(|x - 300| < 10)$.

الحل : إن معلمات المتغير العشوائي X هي $P = \frac{1}{6}$ ، $n = 2000$ وتتبع توزيع ذات الحدين

والقيمة المتوقعة لهذا التوزيع $\mu = n.P = 2000.\frac{1}{6} = \frac{1000}{3}$ وأما التباين لهذا التوزيع

$\sigma^2 = nP(1-P) = 2000 \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{10000}{36}$ ولكون n عدد كبير جدا فإن :

$$P(|x-300|<10) = P(300 - 10<x<300 + 10) = P(290 < x < 310)$$

ولحساب الاحتمال المطلوب نستفيد من جدول التوزيع الطبيعي القياسي وذلك بعد تحويل القيم العادية إلى قيم قياسية :

$$P(290 < x < 130) = \Phi\left(\frac{310 - \frac{2000}{6}}{\sqrt{2000.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{290 - \frac{2000}{6}}{\sqrt{2000.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}}}\right)$$

$$= \Phi(2.6) - \Phi(1.4) = 0.995 - 0.919 = 0.076$$

6-2-2: التوزيع المنتظم Uniform Distribution:

إذا كان X متغير عشوائي منتهي يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots ,x_n$ واحتمالاتها $P(x=x_1), \dots , P(x=x_n)$ فإن الدالة الاحتمالية لهذا المتغير :

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad x = x_1, x_2, \dots, x_n \\ 0 & \text{لقيم X الأخرى} \end{cases}$$

ويقال للعلاقة (6-22) بدالة الاحتمالي المنتظم.

ولنوسع التعريف أعلاه ليشمل المتغير المتصل فإذا كان مجال التعريف للمتغير العشوائي المتصل منتهي وكانت $a \le x \le b$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل X هي :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & , \ a\le x\le b\\ 0 & \text{لقيم X الأخرى}\end{cases}$$

ونستطيع توضيح بأن $\int_a^b f(x)dx=1$ كما يلي.

$$\int_a^b \frac{1}{a-b}dx=\frac{1}{a-b}x]_a^b=\frac{1}{a-b}(b-a)=1$$

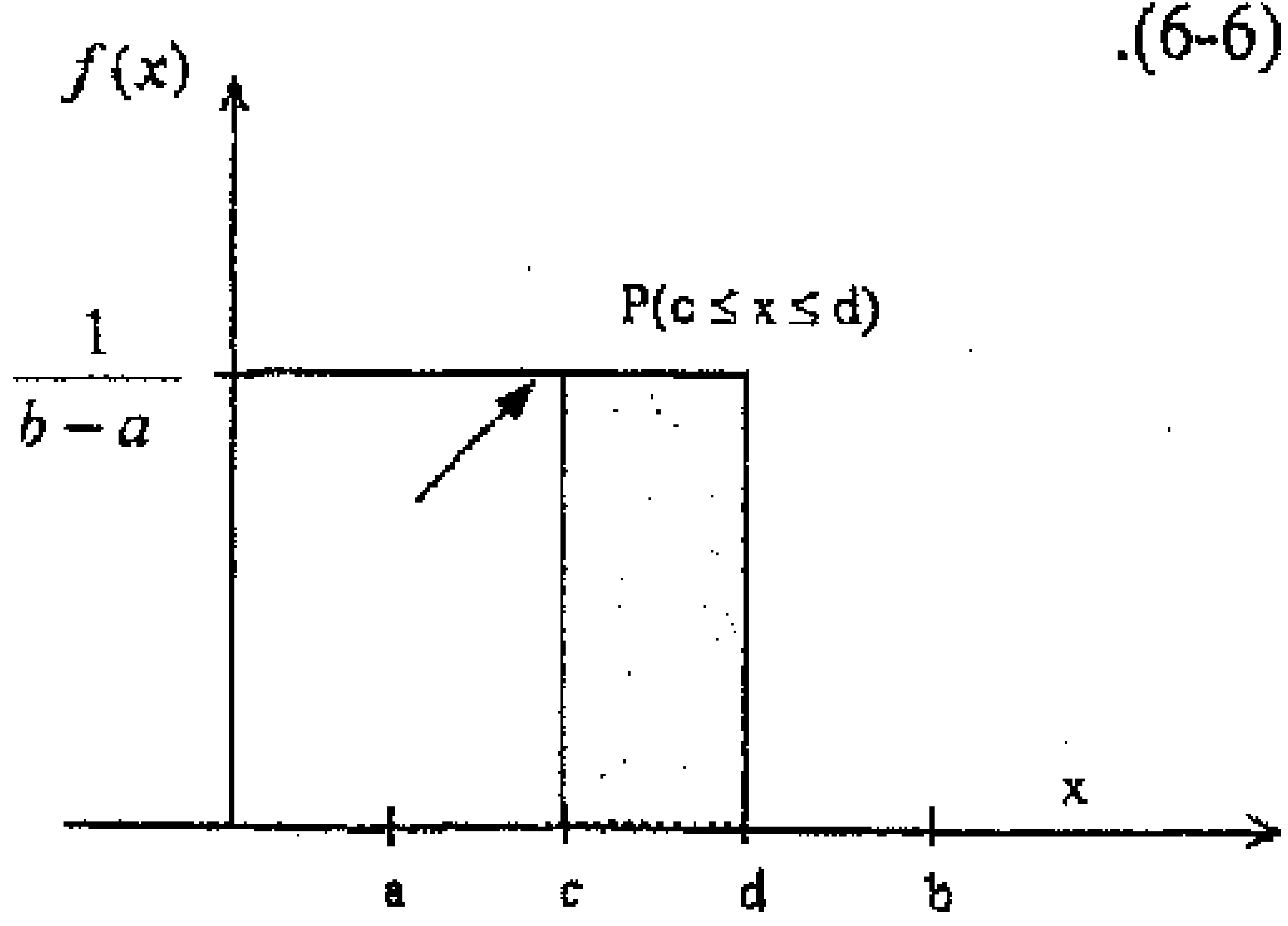
أما دالة التوزيع للمتغير العشوائي X فهي :

$$F(x)=\int_a^x \frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}$$

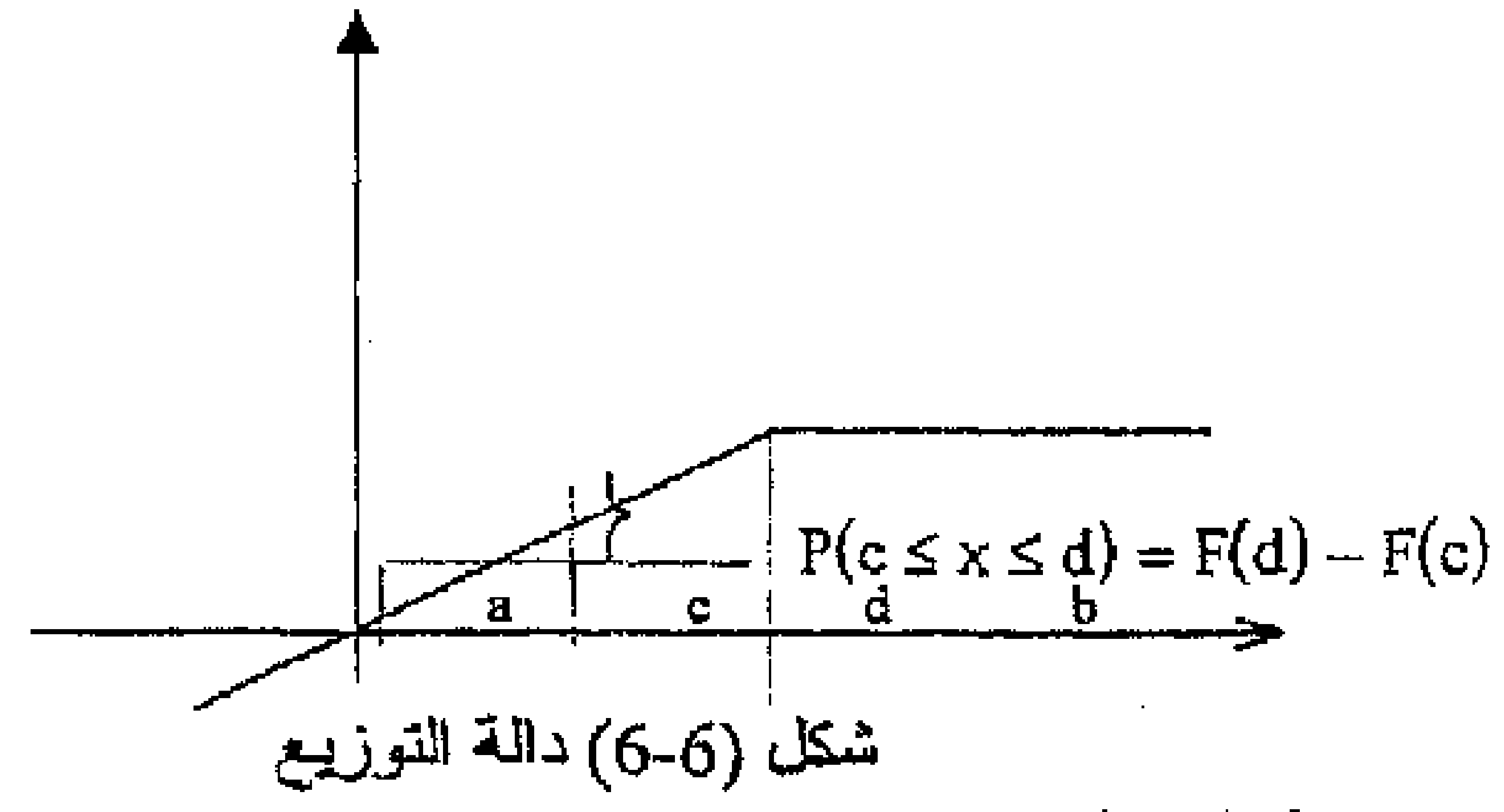
وعليه فإننا نكتب دالة التوزيع بالصورة التالية :

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \ x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & , \ a\le x\le b\\ 1 & , \ x\ge b\end{cases} \qquad \text{....... (6-24)}$$

وبيان العلاقة (6-23) موضح بالشكل (6-5) بينما العلاقة (6-24) موضحة بالشكل (6-6).



شكل (6-5) دالة الاحتمال $F(x)$



شكل (6-6) دالة التوزيع

ودالة العزم المولد لهذا التوزيع.

$$Mx(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

وبأخذ المشتقة الأولى والتعويض عن $t = 0$ نحصل على القيمة المتوقعة

$$E(x) = \frac{a+b}{2}$$

وأما التباين $V(x) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

مثال (6-10) : قطار يصل إلى المحطة الساعة الحادي عشر فإذا كان وقت وصول القطار يتبع التوزيع المنتظم وكان المتغير العشوائي X يأخذ قيم بين 11,10 – 10,55 أوجد احتمال أن يصل القطار بعد ثلاثة دقائق على الأكثر من الوقت المحدد حسب برنامج القطار.

الحل : نكتب دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير على النحو التالي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15} & , \quad 10.55 < x < 11.3 \\ 0 & , \quad \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

6-2-3: التوزيع الاسي : Exponential Distribution

إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}.e^{-x/\lambda} & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x \le 0 \end{cases} \qquad \text{.........} (6\text{-}25)$$

$\lambda < 0$ معلمة.

ونستطيع توضيح أن $\int_0^\infty \frac{1}{\lambda}.e^{-x/\lambda}dx = 1$

ودالة التوزيع للمتغير العشوائي x هي :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\lambda}.e^{-\frac{t}{\lambda}}dt = 1 - e^{-x/\lambda}$$

وعليه يمكن صياغة دالة التوزيع بالعلاقة التالية :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x\backslash\lambda} & , \quad x > 0 \\ 1 & , \quad x \to \infty \end{cases} \qquad \text{.........} \ (6\text{-}26)$$

ومن العلاقة (6-26) فإن :

$$P(X > x) = 1 - P(X \le x) = e^{-x\backslash\lambda}$$

والقيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X هي :

$$M_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{tx}\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}dx$$

ونستخدم التحويل التالي $U = \left(\frac{1}{\lambda} - t\right)x$

$$M_X(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-(1-\lambda t)x\backslash\lambda}dx$$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - t}.\int_0^{+\infty} e^{-u}du = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - t} = (1 - \lambda t)^{-1}$$

ومن هنا فإن القيمة المتوقعة $E(X) = \lambda$

وتباين التوزيع $V(X) = \lambda^2$

نظرية (6-2) : لكل قيم s, t $s > 0, t > 0$, فإن :

$$P\ [(x > s + t) / (x > s) = P(x > t)$$

البرهان : من تعريف الاحتمال المشروط فإن :

$$P[(x > s + t)/(x > s)] = \frac{P(x > s + t)}{P(x > s)}$$

$$= \frac{1 - P(x \le x + t)}{1 - P(x \le s)} = \frac{e^{-(s+t)\backslash\lambda}}{e^{-s\backslash\lambda}}$$

$$= e^{-t/\lambda} = P(x > t)$$

6-2-4: توزيع جاما Gamma Distribution

قبل الخوض في توزيع جاما لنعرف أولا ماذا نعني بالدالة جاما والتي سنرمز لـها بـالرمز Γ وهي على النحو التالي :

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1}.e^{-x}dx \quad , \quad n > 0$$

وباستخدام التكامل بالأجزاء وذلك بفرض أن :

$$U = x^{n-1} \qquad \int e^{-x}dx = \int dv =$$

$$dU = (n-1)x^{n-2} \qquad -e^{-x} = v$$

$$\Gamma(n) = e^{-x}.x^{n-1}\Big|_0^{+\infty} + \int (n-1)\,x^{n-2}.e^{-x}dx. \qquad = (n-1)\,\Gamma\,(n-1)$$

فإذا كان n عدد صحيح موجب فإن :

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1) = (n-1)\,(n-2)\,\Gamma\,(n-2) = \ldots\ldots\ldots$$

$$= (n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\ldots\,\Gamma(1)$$

ولكون $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$ فإنه يمكن كتابة $\Gamma(n) = (n-1)\,!$ وكذلك يمكن كتابة $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 0\int^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}.e^{-x}dx = \sqrt{\pi}$ وذلك من تعريف دالـة Γ. ويمكن كتابة دالـة الكثافـة الاحتمالية للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع جاما على الصورة :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}.x^{n-1}.e^{-x/\lambda}, & x > 0 \\ 0 & ,x \le 0 \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots (6\text{-}27)$$

وهنا n , λ معلمات للتوزيع Γ, وإذا كان n عدد صحيح موجب :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!\lambda^n}.x^{n-1}.e^{-x/\lambda} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \le 0 \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots (6\text{-}28)$$

وعندما تكون $n = 1$ فإن توزيع جاما يتحول إلى التوزيع الأسي ويصبح بالصورة :

$$f(x) = \frac{1}{0!\lambda}.x.e^{-x/\lambda}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}.e^{-x/\lambda} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x\le 0\end{cases}$$

والآن نجد دالة العزم المولد لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X :

$$M_x(t)=\int_0^{+\infty} e^{tx}\frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}.x^{n-1}.e^{-x/\lambda}.dx.$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}\int_0^{+\infty} x^{n-1}.e^{-(1-\lambda t)x/\lambda}.dx.$$

ولكون $\frac{1}{\lambda}>t$ فإن التكامل أعلاه تقاربي. وإذا أجرينا التحويل التالي :

$$x=\frac{\lambda}{1-\lambda t}y \rightarrow dx=\frac{\lambda}{1-\lambda t}dy$$

وبالتعويض في أعلاه فإن :

$$M_x(t)=\frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda t}\right)^{n-1} y^{n-1}.e^{-y}\frac{\lambda}{1-\lambda t}dy.$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda t}\right)^n\int_0^{\infty} y^{n-1}.e^{-y}dy$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda t}\right)^n\Gamma(n)=\left(\frac{1}{1-\lambda t}\right)^n=(1-\lambda t)^{-n}$$

وإذا أخذت المشتقة بالنسبة لـ t ثم إيجاد قيمة المشتقة الأولى عندما t=0 فإنه ينتج الوسط الحسابي μ.

$$M_x^{1}(t)=(-\lambda)(-n)(1-\lambda t)^{-n-1}$$

$$=\lambda n(1-\lambda t)^{-n-1}$$

$$\mu \quad = M_x^{1}(O)=\lambda n=E(x)$$

وبالمثل نجد أن تباين المتغير العشوائي :

$$V(x)=\lambda^2 n$$

ولإيجاد دالة لتوزيع للمتغير العشوائي X فإن.

$$F(x)=1-P(X>x)$$

$$=1-\int_x^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!\lambda^n}t^{n-1}.e^{-t/\lambda}dt$$

وإذا عمل التحويل التالي :

$$\frac{1}{\lambda}t = u \Rightarrow t = \lambda u \Rightarrow dt = \lambda du$$ ويصبح

$$F(x) = 1 - \int_{t/\lambda}^{+\infty} \frac{U^{n-1}.e^{-U}}{(n-1)!}du$$

6-2-5 : توزيع بيتا Beta Distribution

إذا كان المتغير العشوائي x يتبع توزيع بيتا وعلى اعتبار أن $\alpha > 0 , \beta > 0$ ، فإن دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{لقيم x الأخرى} \end{cases} \qquad \text{..... (6-29)}$$

وبالتالي فإن الدالة الاحتمالية لتوزيع بيتا هو :

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad \text{......... (6-30)}$$

ومن العلاقة (6-30) نجد أن :

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = 1$$

ويقال لتكامل العلاقة (6-30) بأنه دالة بيتا ويرمز له بالرمز $B(\alpha, \beta)$ وعليه فإن دالة بيتا تصبح على النحو :

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

وباستخدام هذه الدالة فإننا نجد الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع بيتا ومن تعريف القيمة المتوقعة.

$$E(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^1.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.\frac{\Gamma(\alpha+1).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.\alpha\frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \Rightarrow E(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

مع ملاحظة أن $\Gamma(\alpha+\beta+1) = (\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta), \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

ولحساب التباين للمتغير العشوائي X نجد أولا $E(x^2)$:

$$E(x^2)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^2.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

ومـــن

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}.\frac{\Gamma(\alpha+2).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}.\frac{(\alpha+1)(\alpha)\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

علاقة التباين :

$$V(x)=E(x)^2-\mu^2$$

$$=\frac{(\alpha+1)\alpha}{(+\beta+1)(\alpha+\beta)}-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2$$

$$=\frac{(\alpha^2+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

$$=\frac{\alpha^3+\alpha^2+\alpha^2\beta+\alpha\beta-\alpha^3-\alpha^3\beta-\alpha^2}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+1)^2}$$

$$V(x)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

6-2-6: توزيع كوشي Cauchy Distribution :

إن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كوشي هو :

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

ودالة التوزيع لهذا المتغير :

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\left(\arctan x t\frac{\pi}{2}\right) & , \quad -\infty < x < +\infty \\ 0 & , \quad x \to -\infty \\ 1 & , \quad x \to +\infty\end{cases}$$

ولهذا التوزيع فإن

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{1\times 1}{\pi(1+x^2)}dx$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\log(a^2+1)\right]=+\infty$$

وهنا ليس لهذا التوزيع قيمة متوقعة ولا تباين.

تمارين الفصل السادس

1) على اعتبار أن n عدد صحيح وكانت $P = \frac{1}{2}$ وكان $P\left(x;n,\frac{1}{2}\right)$ ، $P\left(x;2n,\frac{1}{2}\right)$ توزيعين لذات الحدين قارن $P(x = x)$ لكلا التوزيعين.

2) غرفة بها 200 مستقبل لأجهزة الراديو منها 15 جهاز تالف سحب من هذه الأجهزة 20 جهازا وكان السحب دون الإعادة وإذا كان x يمثل عدد الأجهزة التالفة في العينة وعلى اعتبار أن x متغير عشوائي والمطلوب إيجاد :

$P(3 \le x \le 7)/(2 \le x \le 5)$ (a　　　$P(x \ge 1)$ (b

3) يلقى من كيس به 20 قطعة نقود على منضدة. احسب احتمال أن يكون عدد الكتابات العدد 6 فأكثر.

4) يلقي حجر نرد 2n مرة احسب احتمال أن يظهر الرقم 1 على الوجه العلوي من مرة ثم باستخدام قانون ستيرلنغ لتثبت أن القيمة التقريبية لهذا الاحتمالي هو $\frac{5}{gn}\sqrt{\pi n}$.

5) إذا كانت معلمات توزيع ذات الحدين هي $n = 15, P = \frac{1}{3}$ أوجد قيمة x التي تجعل الاحتمالي $P\ (x = x)$ أكبر ما يمكن.

6) إذا كان المتغير العشوائي x يتبع بواسون وكان $P(x=0)=0.4$ احسب $P(x>2)$.

7) أوجد قيمة x التي تحقق $P\ (x = x) = P(x = x-1)$ في توزيع ذات الحدين $b\ (x;n,P)$.

8) تلقي قطعة نقود لحين ظهور أربع صور (علما بأنه يتوقف إلقاء قطعة نقود وحينما تظهر الصورة الأربعة وإذا كان المتغير العشوائي يمثل عدد الرميات فأوجد الاحتمال $P[(2 \ge x \ge 5)(x \ge 3)]$.

9) ألقيت قطعة نقود لحين الحصول على 20 كتابة احسب احتمال الحصول على كتابة في الرمية السابعة.

10) في اختبار يحتوي على عشرة أسئلة وكل سؤال صحيح يعطى درجة 10، ... ، 2, 1, 0 وإذا كان معدل العلاقات هو $\mu = 6.7$ وتتوزع هذه الإجابات توزيعا طبيعيا وعلى اعتبار أن $P(x > 8) = 0.10$ احسب ما يلي .

a) أوجد $P(x\ 1 \le 7)$.

b) أعلى علامة حصل عليها طالب من بين 15% من الحاصلين على أخفض العلامات.

11) إذا كان x متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي وإذا كان احتمال أن تكون قيمة المتغير العشوائي أقل من 50 هو 0.1 وأكبر من 100 هو 0.05. احسب ما يلي :

a) احسب احتمال $P\ (x > 70)$\.

b) احسب احتمال $P[(x \le 70)/(60 \le x \le 80)]$

c) احسب قيمة α التي تحقق $0>15 = P\ (x > 4)$.

12) إذا كان x متغير عشوائي وتوزيعه الاحتمالي $N(2, 9)$. أوجد قيمة a التي تحققها المساواة التالية $2P(x \le a) = 1-3P(x>a)$.

13) إذا كان لدينا المتغير العشوائي المتصل x يتبع التوزيع الأسي وكان $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{50}$ وإذا كان $Y = 2x + 1$ فأوجد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع ودالة التوزيع له.

14) إذا كان المتغير العشوائي x يمثل العمر الزمني لمصباح كهربائي ينتج من قبل ماكينة وكان هذا المتغير يتبع التوزيع الأسي وكان $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1000}$ والمطلوب :

a) حساب $P(1\ x\ 1 \le 1500)$. b) القيمة المتوقعة $E(x/x \le 5)$.

c) دالة التوزيع الشرطي $F(x / x \le 5)$.

15) إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل معطاة بالشكل التالي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} & , \quad -\alpha \le x \le \alpha \\ 0 & , \quad \text{لقيم x الأخرى} \end{cases}$$

أوجد قيم $\alpha > 0$ التي تحققها المساواة $P(|x| \le 1) = P(|x| > 1)$

16) إذا كان احتمال النجاح في تجربة ما هو 75، وأجريت التجربة 1000 فما احتمال أن نحصل على نجاح في الفترة $1000P-40 \le x\ 1600P + 40$

17) إذا كان المتغير العشوائي x يخضع التوزيع المنتظم المتصل وكان $a = 40$، $b = 60$ والمطلوب : دالة التوزيع الشرطية.

a) بالاستفادة من دالة التوزيع احسب $F(x/x \le 20)$.

b) أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية $f(x/x \le 20)$.

الفصل السابع
تقدير الفترات

الفصل السابع

تقدير الفترات

7-1 : فترات الثقة :

تعريف(7-1) : إذا كان أحد ثلاث نقاط على الأقل هي متغير عشوائي فإنه يقال لمثل هذه الفترات بفترات الثقة.

وبدلا من أن نجد تقدير نقطي لمعلمة المجتمع θ سنجد حدود عليا وحدود سفلى وسنجعل هذه الحدود من متغيرات عشوائية بحيث أن معلمة المجتمع تقع ضمن الحدين وبما أننا نعرف احتمال وقوع θ ضمن حدود وهذا يعني أننا نعمل على تقدير الفترة المعنية وبما أن حدود فترة الثقة هي عبارة عن متغيرات عشوائية فإن فترة الثقة متغير عشوائي أيضا وعليه فإن احتمال وقوع θ ضمن الفترة المطلوبة أو ضمن حدود الثقة باحتمال $1-\alpha$ يمكن تعريفه على الصورة التالية :

$$P\left(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\right) = 1-\alpha \quad , \quad \hat{\theta}_2 > \hat{\theta}_1 \quad \text{........} \quad (7\text{-}1)$$

وأما طول فترة الثقة فهي $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ وكلما كان طول فترة الثقة صغير فإن التقدير يعتمد عليه.
وإذا أعطي التقدير النقطي وتقدير الفترة معا فإنه يمكن فهم التقدير النقطي بشكل أفضل.
وسنتناول الخطوات المتبعة للتقدير لفترة وهي :

(1) تحديد المعلمة المراد أجراء عملية تقدير لها مثال ذلك μ.
(2) تحديد المقدر المستخدم لهذه العملية مثل $\bar{x}$.
(3) كتابة توزيع العينة للمقدر ومعرفة معالمه.
(4) تحديد دالة التقدير.
(5) إيجاد مستوى الثقة الذي يحدده الباحث.
(6) الحسابات والنتيجة والقرار. وسنبدأ بفترة ثقة الوسط الحسابي.

7-2 : فترات الثقة لوسط التوزيع الطبيعي :

إذا أخذت عينة عشوائية بحجم n من توزيع طبيعي فإن الوسط الحسابي للعينة لا يتوقع أن يساوي الوسط الحسابي للمجتمع لذا فإنه لابد من وجود علاقة تربط هذين الوسطين ويمكن تعريف هذه العلاقة معتمدة على الاحتمال ولكون توزيع العينة مأخوذ من التوزيع الطبيعي

لذا فإن توزيعه يتمثل بـ $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ولكونه يتمتع بهذا التوزيع فإنه يمكن كتابة العلاقة التالية.

7-2-1 : إذا كان حجم العينة كبيرا اي $n \geq 30$

$$: P\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(7-2)}$$

وبضرب جميع أطراف المتباينة بـ $\sigma/\sqrt{n}$ نحصل على :

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X}-\mu < +Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \quad \ldots\ldots (7\text{-}3)$$

نطرح $\overline{x}$ من جميع الأطراف لنحصل على

$$P\left(-\overline{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\overline{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

وهنا أيضا طرح كمية من جميع أطراف المتباينة لا يغير من إشارة التباين تضرب جميع أطراف المتباينة في (-1) وهذا يغير من إشارة التباين وبعد إعادة ترتيب المتباينة ينتج :

$$P\left(-\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (7\text{-}3)$$

مثال (7-1) : في مسألة تقدير متوسط عمر مصباح كهربائي من إنتاج مصنع من خلال معطيات عينة عشوائية حجمها 100 مصباح حسب الوسط الحسابي $\overline{x} = 501.2$ ساعة وعلى افتراض أن تباين المجتمع معروف $(\sigma^2 = 16)$ أوجد فترة الثقة لمتوسط عمر المصابيح من إنتاج المصنع باحتمال 95 %.

الحل : نحدد المعطيات في المسألة.

المعلمة المراد إيجاد فترة الثقة لها هي μ.

المقدر $\overline{X} = 501.2$, $n = 100$, $\sigma^2 = 16 \Rightarrow \sigma = 4$ والاحتمال 95% نجد قيمة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$ ثم بتطبيق العلاقة (7-3) لينتج.

$$P\left[501.2-1.96\times\frac{4}{\sqrt{100}}<\mu<501.2+1.96\times\frac{4}{\sqrt{100}}\right]=0.95$$

$$P[501.2-0.784<\mu<501.2+0.784]=0.95$$

$$P[500.416<\mu<501.984]=0.95$$

مثال (7-2) : من مجتمع وسطه الحسابي غير معلوم وتباينه 22,5 سحبت عينة حجمها n = 64 بطريقة عشوائية وحسبت القيم التالية لهذه العينة :

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{64}x_i}{64}=7\ ,\quad S^2=\frac{\sum_{i=1}^{64}(x_i-)}{64}=315$$

والمطلوب :

a) فترة الثقة للوسط الحسابي μ باحتمال 90 %.

b) أوجد فترة الثقة باحتمال 90 % إذا علم أن الحد الأدنى لهذه الفترة 3,

الحل : بتطبيق الخطوات السابقة نحدد المعطيات أولا.

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.95}=1.65\ ,\quad n=64\ ,\ S=15\ ,\ \overline{X}=7$ وبتطبيق العلاقة :

$$P\left[7-1.65\left(\frac{15}{8}\right)<\mu<7+1.65\left(\frac{15}{8}\right)\right]=0.90$$

$$\Rightarrow P[3.91<\mu<10.09]=0.90$$

b) لكون الحد الأدنى لفترة الثقة هي 3.5 وبتطبيق الحد الأدنى لفترة الثقة :

$$3.5=\bar{x}-Z_1-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 3.5=7-Z_1.\frac{15}{8}$$

$$\Rightarrow Z_1=1.86$$

وحسب هذه النتيجة فإن $P(Z<1.86)=0.9686$ ، $P(Z>1.86)=0.0314$ وهذا واضح في شكل (7-1) وقد وجدت هذه القيم من جدول Z وبشكل خاص فإن $P(Z<Z_2)=$ 0.9314 نجد أن $Z_2=1.49$ وعليه فالفترة المطلوبة :

$$P\left(3.5 < \mu < \overline{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.90$$

$$\Rightarrow P\left[3.5 < \mu < 7 + 1.49\left(\frac{15}{8}\right)\right] = 0.90$$

$$\Rightarrow P\left[3.5 < \mu < 9.79\right] = 0.90$$

شكل (7-1)

7-2-2 : إيجاد فترة الثقة للوسط الحسابي لـ μ إذا كان حجم العينة صغيرا أو التباين غير معلوم.

في حالة عدم معلومية σ^2 وأردنا تقدير فترة للوسط الحسابي μ باحتمال 1-α فإن العينة التي حجمها n والمسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا فإن هذه العينة تتوزع توزيع t بدرجة حرية n-1 وعليه فإن المتغير العشوائي $t = \frac{(\overline{x}-\mu)\sqrt{n}}{S}$ يقع بين $-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\ ,\ t_{\frac{\alpha}{2}}\ n-1$ باحتمال 1-α و يمكن كتابة العلاقة التالية :

$$P\left[-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\overline{X}-\mu}{S\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}},(n-1)\right] = 1-\alpha \qquad \ldots\ldots (7\text{-}5)$$

بضرب جميع أطراف المتباينة في $\frac{S}{\sqrt{n}}$ نحصل على :

$$P\left[-\left[t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]\frac{S}{\sqrt{n}} < \overline{x}-\mu < \left[t_{\frac{\alpha}{2}},(n-1)\right]\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

بطرح $\overline{x}$ من جميع أطراف المتباينة وترتيب المتباينة ينتج :

$$P\left[\overline{x}-\left[t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]\frac{S}{\sqrt{n}} < -\mu < -\overline{x}+\left[t_{\frac{\alpha}{2}},(n-1)\right].\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

ضرب جميع أطراف المتباينة في 1- لينتج العلاقة :

$$P\left[\bar{x}-\left[t_{\frac{\alpha}{2}},(n-1)\right].\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+\left[t_{\frac{\alpha}{2}},(n-1)\right].\frac{S}{\sqrt{n}}\right]=1-\alpha \quad \ldots \quad (7\text{-}6)$$

مثال (7-2) : أخذت عينة من مجتمع طلابي لمدرسة مـا فوجد أن متوسط أوزان 25 طالبـا هو 45 كغم وكان الانحراف المعياري للأوزان هو 4 والمطلوب :

a) إيجاد فترة ثقة للمتوسط الحسابي μ باحتمال 95%.

b) إيجاد فترة ثقة للمتوسط باحتمال 99%.

الحل : درجة الحرية $n-1 = 25-1 = 24$

a) نجد $t_{\frac{\alpha}{2}},(n-1) = t(0.025)(24) = 2.064$ وبتطبيق العلاقة نجد أن :

$$P\left[45-2.064\times\frac{4}{\sqrt{25}}<\mu<45+2.064\times\frac{4}{\sqrt{25}}\right]=0.95$$

$$P\left[45-2.064\times 0.8<\mu<45+2.064\times 0.8\right]=0.95$$

$$P\left[45-1.6512<\mu<45+1.6512\right]=0.95$$

$$P\left[43.3488<\mu<46.6512\right]=0.95$$

وعليه فإن الفترة المطلوبة هي $[43.3488 , 46.6512]$

b) نجد قيمة t الجدولية أي $t[0.005 , 24] = 2.797$

ثم نطبق العلاقة أعلاه لنحصل

$$P\left[45-2.797\times 0.8<\mu<45+2.797\times 0.8\right]=0.99$$

$$P\left[45-2.2376<\mu<45+2.2376\right]=0.99$$

$$P\left[42.7624<\mu<47.2376\right]=0.99$$

وتكون الفترة المطلوبة $[42.7624 , 47.2376]$ 3-7 : إيجاد فترة الثقة للفرق بين متوسطين :

1-3-7 : إيجاد فترة الثقة للفرق بين متوسطين إذا كان حجم العينة كبيرا.

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{z}}<\frac{(\bar{x}-\bar{x})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}}}<Z_{\frac{\alpha}{z}}\right]=1-\alpha$$

وبضرب جميع أطراف المتباينة $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ لتصبح العلاقة :

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < (\overline{x}_1-\overline{x}_2)-(\mu_1-\mu_2) < Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]=1-\alpha$$

بطرح $(\overline{X}_1-\overline{X}_2)$ من كل طرف من أطراف المتابينة لتصبح العلاقة

$$P\left[(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < -(\mu_1-\mu_2) < -(\overline{x}_1-\overline{x}_2)+Z_{\frac{\alpha}{z}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]=1-\alpha$$

بضرب جميع الأطراف في 1- ثم إعادة الترتيب لنحصل على العلاقة التالي:

$$P\left[(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\overline{x}_1-\overline{x}_2) < Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]=1-\alpha \quad \dots (7\text{-}7)$$

مثال (3-7) : إذا كانت نتائج امتحان الكيمياء الذي أجري لـ 50 طالبـة ، 75 طالبا هـي كمـا يلي :

$$\overline{x}_1 = 76 \quad , \quad \sigma_1 = 6 \quad , \quad n_1 = 50$$
$$\overline{x}_2 = 76 \quad , \quad \sigma_2 = 8 \quad , \quad n_2 = 75$$

والمطلوب إيجاد فترة ثقة للفرق بين متوسطي الطالبات والطلاب لهذا المجتمع باحتمال 96%.

الحل : بتطبيق العلاقة (7-7).

$$P\left[-(76-82)-2.06\sqrt{\frac{36}{50}+\frac{64}{75}} < \mu_1-\mu_2 < (76-82)+2.06\sqrt{\frac{36}{50}+\frac{64}{75}}\right]=0.96$$

$$P[-6-2.06\times 1.25 < \mu_1-\mu_2 < -6-2.06\times 1.25]=0.96$$

$$P[-6-2.575 < \mu_1-\mu_2 < -6+2.575]=0.96$$

$$P[-8.575 < \mu_1-\mu_2 < -3.425]=0.96$$

∴ الفترة المطلوبة هي [-8.575 , -3.425].

7-3-2 : إيجاد فترة الثقة للفرق بين متوسطين إذا كان حجم العينة صغيراً.

لتكوين فترة الثقة المطلوبة نبدأ بتقدير فترة الثقة وذلك بفرض أن :

$$P\left[-t_{\left(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2\right)} < t < t_{\left(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2\right)}\right]=1-\alpha$$

$$P\left[-t_{\left(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2\right)}<\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}<t_{\left(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2\right)}\right]=1-\alpha$$

بضرب جميع أطراف المتباينة في المقدار $S_a\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$ لتصبح المتباينة

$$P\left[-t_{\left(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2\right)}S_a\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)<t_{\left(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2\right)}S_a\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]=1-\alpha$$

وبطرح $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ من جميع الأطراف لتصبح العلاقة :

$$P\left[-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\left(\frac{\alpha}{2}n_1+n_2-2\right)}S_a\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<-(\mu_1-\mu_2)<-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\left(\frac{\alpha}{2}n_1+n_2-2\right)}S_a\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]=1-\alpha$$

ثم نضرب جميع أطرف التمباينة في 1- وإعادة الترتيب ينتج :

$$P\left[-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\left(\frac{\alpha}{2}n_1+n_2-2\right)}S_a\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\left(\frac{\alpha}{2}n_1+n_2-2\right)}S_a\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]=1-\alpha$$

مع ملاحظة أن S_a^2 هو التباين التجميعي والذي يوجد من العلاقة التالية :

$$S_a^2=\frac{S_1^2(n_1-1)+S_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2} \qquad \text{.........} (7\text{-}9)$$

وإن $S_a=\sqrt{S_a^2}$ حيث أن S_a هو الانحراف المعياري التجميعي.

مثال (7-4) : تعطى مادة الإحصاء في كلية ما من قبل مدرسين اثنين A, B وفي نهاية الفصل كانت النتائج المتحصلة على الشكل التالي :

$A:\ \bar{x}_1=72 \quad , \quad S_1=5 \quad , \quad n_1=14$

$B:\ \bar{x}_2=75 \quad , \quad S_2=6 \quad , \quad n_2=12$

والمطلوب : إيجاد فترة ثقة للفرق بين المتوسطين باحتمال 98 %.

الحل : نجد أولا التباين التجميعي من العلاقة (7-9).

$$S_a^2=\frac{S_1^2(n_1-1)+S_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}=\frac{25(14-1)+36(12-1)}{12+14-2}$$

$$=\frac{25\times13+36\times11}{24}=\frac{721}{24}=30.04$$

$$S_a = \sqrt{30.04} = 5.48$$

ثم نجد $t_{(0.01,\,24)} = 2.485$

ولإيجاد فترة الثقة نطبق العلاقة (7-8).

$$P\left[(72-75) - 2.485 \times 5.48\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{12}} < \mu_1 - \mu_2 < (72-75) + 2.485 \times 5.48\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{12}}\right] = 0.98$$

$$P[-3-2.485\times5.48\times0.475<\mu_1-\mu_2<-3+2.485\times5.48\times0.475]=0.98$$

$$P[-9.468<\mu_1-\mu_2<3.468]=0.98$$

وعليه فإن الفترة المطلوبة هي $[-9.468\ ,\ 3.468]$.

7-4 : تكوين فترة الثقة للنسبة :

سوف نرمز لمقدر النسبة $\hat{P}$ حيث أن $\hat{P} = \frac{x}{n}$ وعليه فإن توزيع العينة مأخوذ من مجتمع توزيع طبيعي $N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)$ أي أن وسطه الحسابي P وتباينه $\frac{P(1-P)}{n}$.

وأن دالة التقدير $Z = \frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$ ولإيجاد فترة الثقة المطلوبة يفترض أن

$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$ ثم نعوض عن Z بالقيمة أعلاه.

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

نضرب جميع الأطراف بالمقدار $\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$ لنحصل على المتباينة

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} < \hat{P}-P < Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right] = 1-\alpha$$

بطرح $\hat{P}$ من جميع أطراف المتباينة لنحصل على المتباينة.

$$P\left[-\hat{P}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} < -P < -\hat{P}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right] = 1-\alpha$$

ضرب جميع أطراف المتباينة في 1- مع إعادة الترتيب لنحصل على المتباينة.

$$P\left[+\hat{P}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}<P<\hat{P}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right]=1-\alpha \qquad \dots (7\text{-}10)$$

مثال (7-5) : أخذت عينة مؤلفة من 500 أسرة في أحد المدن، فوجد أن 160 أسرة تمتلك جهاز فيديو والمطلوب تكوين فترة الثقة 95% لنسبة مالكي جهاز الفيديو في هذه المدينة.

الحل: نجد أولا المعطيات $x = 160$, $n = 500$, $1-\alpha = \%95$, $\hat{P} = \frac{X}{n} = \frac{160}{500}$ أي

$\hat{P} = 0.32$ ثم نجد قيمة $z = 0.975$ من الجدول وهي 1.96.

وبتطبيق العلاقة أعلاه نجد أن :

$$P\left[+0.32-1.96\sqrt{\frac{(0.32)(0.68)}{500}}<P<0.32+1.96\sqrt{\frac{(0.32)(0.68)}{500}}\right]=0.95$$

$$P[0.28<P<0.36]=0.95$$

وعليه فإن الفترة المطلوبة [0.28 , 0.36].

7-5 : إيجاد فترة الثقة للفرق بين نسبتين :

ننطلق من العلاقة :

$-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ وبالتعويض عن Z لنحصل على المتباينة :

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(P_1-P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}}<Z_{\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$

بضرب جميع أطراف المتباينة في $\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$ لنحصل على المتباينة التالية :

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}<(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(P_1-P_2)<Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}\right]=1-\alpha$$

بطرح $(\hat{P}_1-\hat{P}_2)$ من جميع أطرافا لمتباينة لنحصل على المتباينة التالية :

$$P\left[-(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}<-(P_1-P_2)<-(\hat{P}_1-\hat{P}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}\right]=1-\alpha$$

وبضرب جميع أطراف المتباينة في 1- ثم إعادة الترتيب لنحصل على المتباينة التالية :

$$P\left[(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}<P_1-P_2<(\hat{P}_1-\hat{P}_2)+<Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}\right]=1-\alpha$$

......(7-11)

7-6 إيجاد فترة الثقة للتباينات :

لنأخذ العينة ذات الحجم n من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا والمطلوب إيجاد فترة الثقة لتباين المجتمع σ^2 بمستوى ثقة $1-\alpha$ بالاستفادة من كون أن المتغير العشوائي $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ وبدرجة حرية n-1 يتوزع توزيع كاي تربيع فإننا نجد هذه الفترة فإذا افترضنا بدأ ذي بادئ أن المتغير العشوائي يقع بين $X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}, n-1, X^2_{\frac{\alpha}{2}}, n-1$ باحتمال $1-\alpha$.

$$P\left[X^2_{1-\frac{\alpha}{2}},(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<X^2_{\frac{\alpha}{2}},(n-1)\right]=1-\alpha \quad ......\ (7\text{-}12)$$

وبضرب جميع الأطراف للمتباينة بـ $\frac{1}{(n-1)S^2}$ ثم أخذ المقلوب وإعادة الترتيب

لنحصل على :

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2}},(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2}},(n-1)}\right]=1-\alpha \qquad ......\ (7\text{-}13)$$

وإذا ما أردنا إيجاد فترة الثقة للانحراف المعياري σ فإننا نأخذ الجذر التربيعي لجميع أطراف المتباينة.

مثال (6-7) : من مجتمع مجهول الوسط الحسابي والتباين أخذت عينة بطريقة عشوائية حجمها $n = 36$ ومن هذه العينات وجدت البيانات التالية:

$$\bar{x} = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} x_i = 5 \quad , \quad A = \sum_{i=1}^{36}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 560$$

المطلوب : إيجاد فترة ثقة للتباين σ^2 باحتمال 90%.

الحل : باستخدام العلاقة أعلاه.

$$P\left[\frac{560}{X^2_{(0.05),35}} < \sigma^2 < \frac{560}{X^2_{(0.95),35}}\right] = 0.90$$

أو $P\left(12.79 < \sigma^2 < 30.28\right) = 0.90$ وحدة هي الفترة المطلوبة.

الفصل الثامن
اختبار الفرضيات

الفصل الثامن

اختبار الفرضيات

مقدمة :

نظراً لأهمية هذا الفصل الذي يساعد في اتخاذ القرارات لذا سنولي أهمية خاصة وسنعطي المفاهيم بمزيد من الأمثلة.

تعريف(8-1): الفرضية عبارة عن مقولة أو طرح يصاغ حول معلمة معينة ونطرح للاختبار فإما أن تقبل أو ترفض وبناء على هذه النتيجة للاختبار يصاغ إلى اتخاذ قرار موضوعي من صلب البيانات ا لمتوفرة في عينة ما.

وهناك نوعان من الفرضيات يكمل كل منهما الآخر ويطلق على الأولى الفرضية العدمية وسنرمز لها بالرمز H_0 بينما الفرضية المكملة هي الفرضية البديلة وسنرمز لها بالرمز H_1 وكلا الفرضيتين معا تشكلا ن فضاء الاختبار فعند قبول أحد الفرضيتين نكون قد رفضنا الفرضية البديلة ضمنا فإذا قبلنا الفرضية H_0 فمعنى ذلك نكون قد رفضنا H_1 والعكس صحيح وفي هذة الحالة يبرز لدينا نوعين من الخطأ

1) **خطأ من النوع الأول :** وهو عبارة عن رفض فرضية صحيحة.

2) **خطأ من النوع الثاني :** وهو حادث قبول فرضية خاطئة. وعلى ذلك يكون احتمال رفض فرضية$_0$ H علما بأنها صحيحة أي :

(رفض H_0/ H_0 صحيحة) $P= \alpha$ ويطلق على α اسم مستوى المعنوية ، وعلى غرار ذلك فإن

ح (قبول H_0/H_0خاطئة) $P= \beta$ وهذا هو احتمال الخطأ من النوع الثاني. وهدفنا دائما هو ان لا نقع في أي من الخطأين أو التقليل من ذلك ولعمل ذلك نزيد حجم العينة الذي يقلل من الوقوع α ، β في آن واحد.

الاختبارات الإحصائية :

8-1 : اختبار العلاقةبين متوسط عينة ومتوسط مجتمع :

8-1-1: في حالة معلومية الانحراف المعياري σ للمجتمع وحجم العينة كبيراً.

إذا أردنا دراسة أو اختبار العلاقة بين متوسط عينة $\bar{X}$ ومتوسط مجتمع μ لمعرفة ما إذا كان الفرق معنويا أي $(\bar{X}-\mu)$ أو غير معنوي بدرجة ثقة معينة نتبع الخطوات التالية:

- تحديد درجة الثقة ومستوى المعنوية فإذا كانت درجة الثقة $(1-\alpha)$ = 95% فإن α 0.05= حيث α مستوى المعنوية. فتكون قيمة Z الجدولية 1.96 وإذا كانت درجة الثقة 0.99 = $1-\alpha$ فإن مستوى المعنوية 0.01 = α وعليه فإن $\frac{\alpha}{2}=0.005, Z_{\frac{\alpha}{2}}=3$.

- تحديد الفرض ومنطقة كل فرض وهذه الفروض هي :

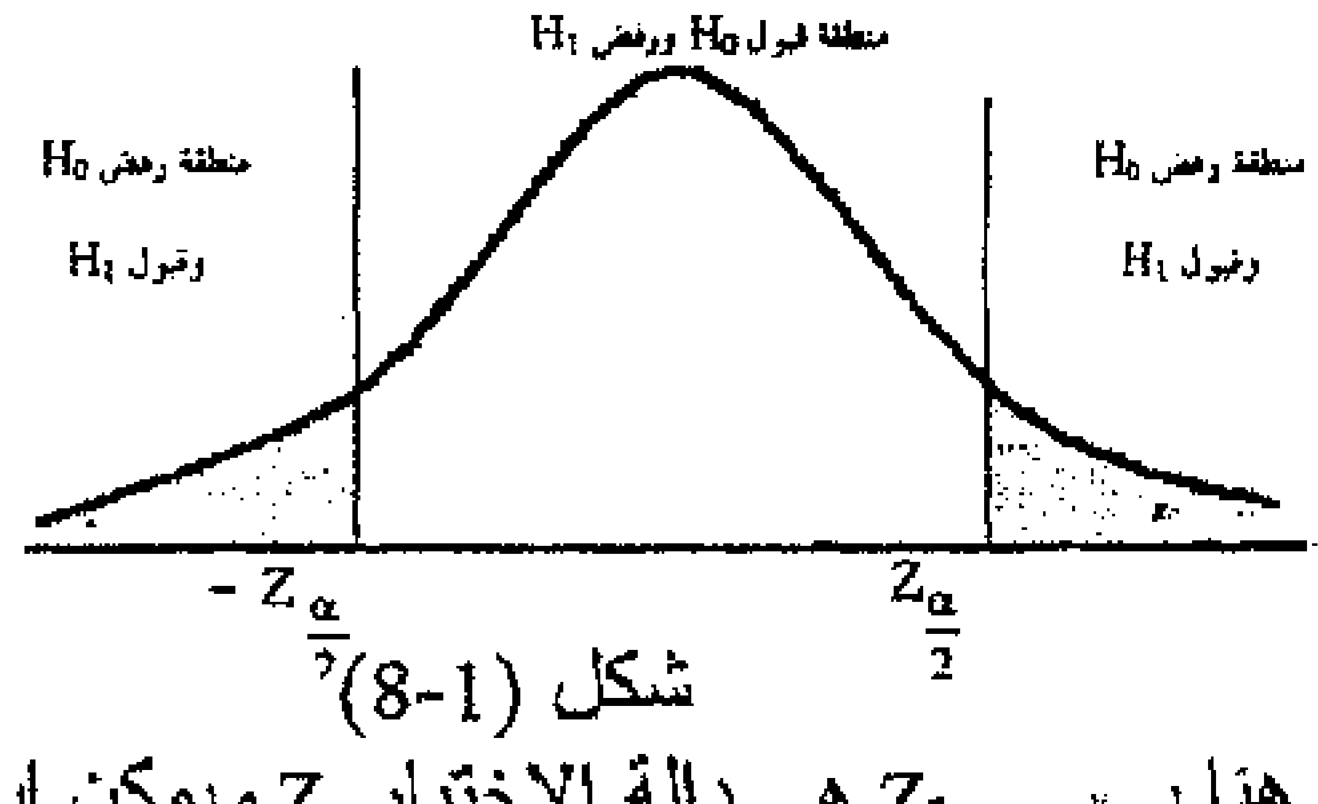
1) فرض العدم H_0 ومعناه عدم وجود فرق معنوي بين المتوسطين وعليه فإن العينة تنتمي إلى المجتمع μ ونكتب $N(\mu,\sigma^2)$ وتكون منطقةقبول الفرض $H_0:\mu=\mu_1$ هي المنطقة المحددة بـ $-Z_{\frac{\alpha}{2}}<Z<Z_{\frac{\alpha}{2}}$ حيث $\alpha=0.05$ أو $\alpha=0.01$.

2) الفرض البديل (H_1) ومعناه عدم وجود فرق معنوي بين المتوسطين أي أن $\mu-\bar{X}$ مهم.

وهنالك تظهر أمامنا ثلاثة بدائل في الفرض البديل H_1 :

a) إذا كان $H_0:\mu=\mu_1$ وكان $H_1:\mu\neq\mu_1$

فإننا نرفض H_0 إذا كانت $\left|Z_{\text{المحسوبة}}\right| > Z_{\frac{\alpha}{2}\text{الجدولية}}$ كما هو واضح في شكل(8-1)

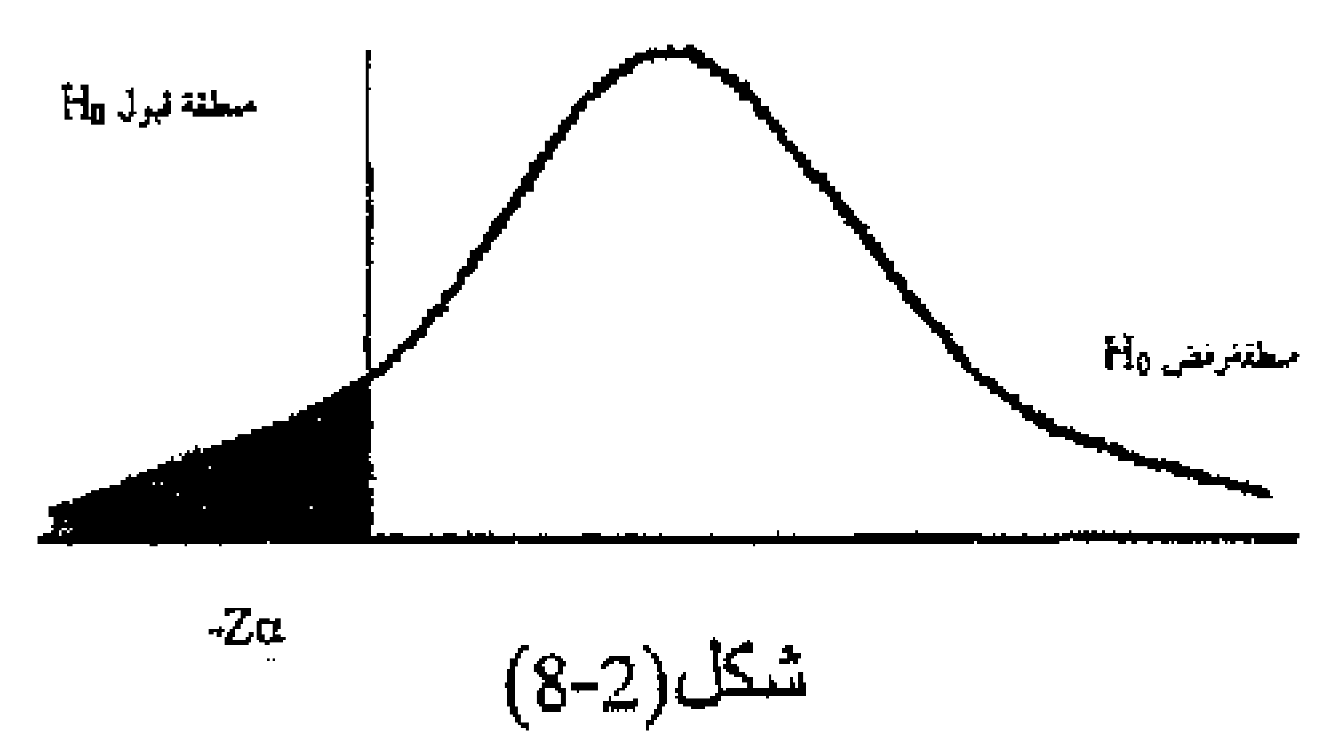


شكل (8-1)

والمقصود هنا بـ $Z_{\text{المحسوبة}}$ هي دالة الاختبار Z ويمكن إيجادها من العلاقة التالية:

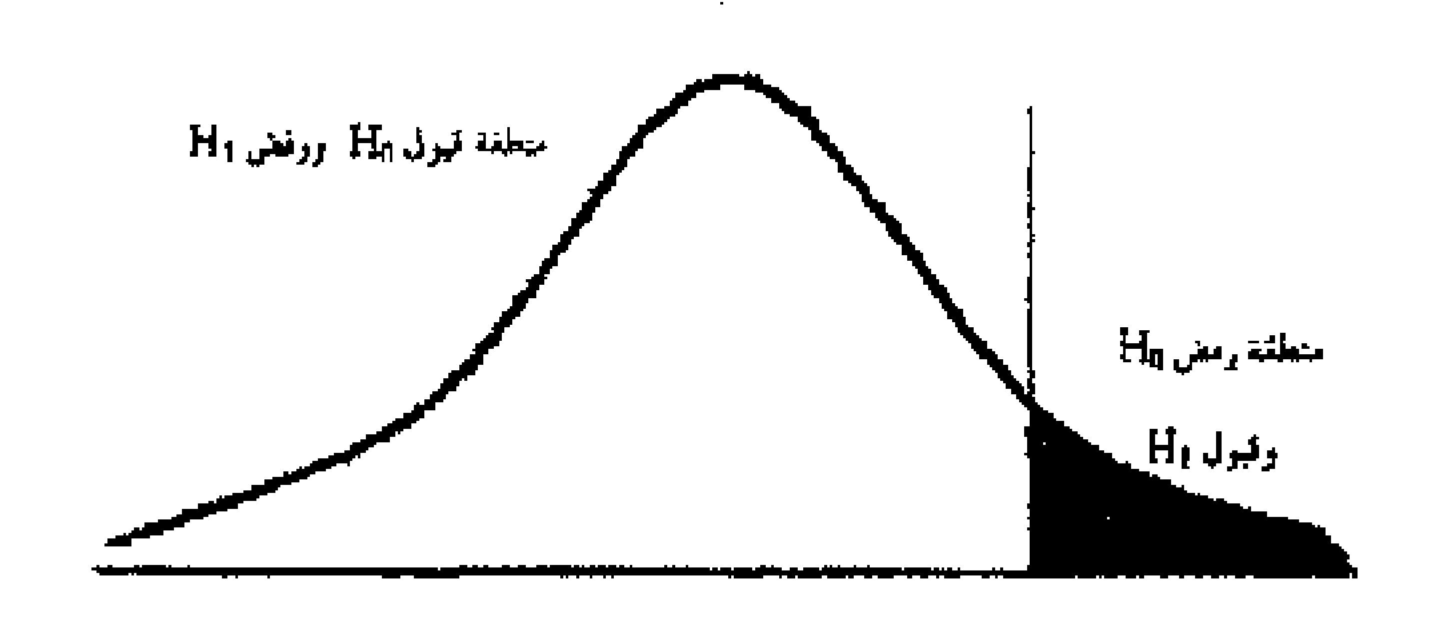
$$Z_{\text{المحسوبة}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

b) إذا كان $H_0:\mu = \mu_1$ وكان $H_1:\mu \leq \mu_1$ فإننا نرفض H_0 إذا كانت $-Z_{\alpha\,\text{الجدولية}} > Z_{\text{المحسوبة}}$ كما في شكل (8-2)



شكل(8-2)

c) إذا كان $H_0:\mu = \mu_1$ وكان $H_1:\mu \geq \mu_1$ فإننا نرفض H_0 إذا كانت $Z_{\alpha\,\text{الجدولية}} > Z_{\text{المحسوبة}}$ كما في الشكل(8-3)



شكل (8-3)

مثال((8-3): أخذت عينة بطريقة عشوائية من 100 كيس إسمنت من مصنع الإسمنت ووجد أن متوسط وزن كيس الإسمنت 49.5فهل يمكن أن نستنتج أن متوسط هذه العينة تتمشى مع المتوسط العام لوزن الكيس وهو 50كغم إذا علم أن الانحراف المعياري $\sigma = 5$ بدرجة ثقة 95%.

الحل : بإتباع الخطوات السابقة نبدأ بتكوين الفرضيات.

$$4)\ Z_{\text{المحسوبة}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{0.2}{\frac{0.5}{10}} = \frac{0.2}{0.05} = -4$$

نلاحظ أن $Z_{\text{المحسوبة}}$ وقعت في المنطقة الحرجة وهي منطقة رفض H_0 على مستوى الدلالة $\alpha = 0.01$.

8-1-2: اختبار الوسط الحسابي لتوزيع $N(\mu,\sigma^2)$ ، σ^2 مجهولة وحجم العينة صغير.

نظرية (8-1) : إذا كانت $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ قيم مشاهدات العينة العشوائية مأخوذة من توزيع طبيعي وكانت σ^2 غير معلومة فإننا نستخدم قيمة دلالة الاختبار T حيث : $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

وإذا كانت $H_0: \mu = \mu_1$ فهناك ثلاث بدائل للفرضية البديلة H_1.

a) فإذا كانت $H_1: \mu \neq \mu_1$ فإننا نقبل H_0 على مستوى الدلالة α عندما $T_{[1-\alpha, n-1]\text{الجدولية}} < T_{\text{المحسوبة}} < T_{\text{الجدولية}}$ ونرفضها إذا كان $Z_{\text{المحسوبة}} > |Z_{\text{الجدولية}}|$.

b) أما إذا كانت $H_1: \mu < \mu_1$ فإننا نرفض H_0 إذا كانت

$T_{\text{المحسوبة}} < -T_{[1-\alpha, n-1]\text{الجدولية}}$

c) وإذا كانت $H_1: \mu > \mu_1$ نرفض H_0 إذا كانت

$T_{\text{المحسوبة}} > T_{[1-\alpha, n-1]\text{الجدولية}}$

مثال (8-4) : أخذت عينة عشوائية حجمها 25 مفردة ومن توزيع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ وكانت σ^2 مجهولة وأردنا أن نختبر H_0 حيث $\mu = 66$ مقابل $H_1 : \mu > 55$ على مستوى الدلالة $\alpha = 0.01$ $T_{(24.1-0.01)} = 1.341$.

الحل : نجد أولا الجدولية حيث $T(24, 1\text{-}0.01) = 1.341$

ثم نجد $T_{\text{المحسوبة}} = \frac{60-55}{\frac{3}{\sqrt{25}}} = \frac{5}{0.6} = 8.33$

وبالمقارنة مع $T_{\text{الجدولية}}$ وبما أن $T_{\text{المحسوبة}} > T_{\text{الجدولية}}$ فإننا نرفض H_0 على مستوى $\alpha = 0.01$.

2 - 8: اختبار الفرضيات للفرق بين الوسطين مع معلومية σ_2^2, σ_1^2.

يمكن توضيح اختبار الفرضيات للفرق بين وسطين من خلال اعطاء النظرية التالية.

نظرية (8-2) : إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 ووسطها الحسابي $\bar{x}_1$ تتوزع توزيعا طبيعيا $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ثم أخذت عينة عشوائية حجمها n_2 ووسطها الحسابي $\bar{x}_2$ من توزيع طبيعي $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ مستقل عن الأول وكانت σ_2^2, σ_1^2 معلومتين وأردنا اختبار $H_0: \mu_1 = \mu_2$ أو $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ مقابل الفرضية البديلة H_1.

a) إذا كانت $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ فإننا نرفض H_0 على مستوى الدلالة α إذا كانت: $|Z_{\text{الجدولية}}| > Z_{\text{المحسوبة}}$.

$$Z_{\text{المحسوبة}} = \frac{(\overline{X}_1 - X_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

حيث :

b) إذا كانت $H_1: \mu_1 < \mu_2$ فإننا نرفض H_0 على مستوى الدلالة α إذا كانت $Z_{\text{المحسوبة}} < -Z_{\text{الجدولية}}$

c) إذا كانت $H_1: \mu_1 > \mu_2$ فإننا نرفض H_0 على مستوى الدلالة α إذا كانت $Z_{\text{المحسوبة}} > Z_{\text{الجدولية}}$.

مثال (8-5): لدينا نوعين من السجاير وحسبنا متوسط النيكوتين في السجاير فوجد في النوع الأول $\overline{X}_1 = 24.1$ ملم عندما كان حجم العينة 40 سيجارة والتباين $\sigma_1^2 = 1.44$ فيما وجد في النوع الثاني $\overline{X}_2 = 23.8$ عندما كان حجم العينة 50 سيجارة والتباين $\sigma_2^2 = 1.96$ وأردنا اختباره $H_0: \mu_1 - \mu_2$ مقابل $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ على مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$.

الحل : نجد أولا $Z_{\text{المحسوبة}}$ من العلاقة .

نجد

$$Z_{\text{المحسوبة}} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(24.1 - 23.8) - 0}{\sqrt{\frac{1.44}{40} + \frac{1.96}{50}}}$$

$$= \frac{0.3}{0.87} = 0.36$$

ثم نجد $Z_{\text{الجدولية}}$ حيث $Z_{0.95} = 1.64$

بما أن $Z_{\text{الجدولية}} > Z_{\text{المحسوبة}}$ لذا نقبل H_0 ونرفض H_1.

8-3 : اختبار الفرضيات للفرق بين وسطين إذا كان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ومجهولان.

نظرية(8-3) : إذا كانت قيم المشاهدات $x_1, x_2, \dots, x_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ وكانت المشاهدات $y_1, y_2, \dots, y_n$ عينة عشوائية من توزيع $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ مستقل عن التوزيع الأول وكان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ مجهولان وأردنا اختبار $H_0: \mu_1 - \mu_2$ على مستوى الدلالة α مقابل :

a) $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ وفي هذه الحالة فإننا نقبل H_0 إذا كانت :

$$-T_{\left[1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right]} < \frac{\bar{x} - \bar{y}}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < T_{\left[1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right]}$$

حيث أن $\frac{\bar{x} - \bar{y}}{Sa\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = T_{\text{المحسوبة}}$ وأن :

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2) - 2} \quad \text{(التباين التجميعي).}$$

b) وإذا كان $H_1: \mu_1 > \mu_2$ فإننا نقبل H_0 على مستوى الدلالة α إذا كانت $T_{\text{المحسوبة}} > -T_{\text{الجدولية}\,[1-\alpha, n_1+n_2-2]}$.

مثال (8-6) : عينتان عشوائيتان من توزيعين مستقلين $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ، $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ وكانت $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ومجهولتان ووجد أن حجم العينة الأولى $n_1 = 64$ وحجم العينة الثانية $n_2 = 64$ وكان الوسط الحسابي للعينة الأولى 16 وكان الوسط الحسابي للعينة الثانية 20 وكان $S_1^2 = 9$ بينما $S_2^2 = 16$. والمطلوب اختبار الفرضية $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ مقابل.

a) $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ b) $H_1: \mu_1 > \mu_2$ c) $H_1: \mu_1 < \mu_2$, $\alpha = 0.05$

الحل : قبل البدء بالاختبار نحدد أولا المعطيات والمتطلبات في المسألة.

$$n_1 = 64 \;,\; n_2 = 49 \;,\; \bar{x}_1 = 16 \;,\; \bar{x}_2 = 20 \;,\; S_1^2 = 9 \;,\; S_2^2 = 16$$

ثم نجد

$$S_p^2 = \frac{S_1^2(n_1 - 1) + S_2^2(n_2 - 1)}{(n_1 + n_2) - 2} = \frac{9(64-1) + 16(49-1)}{64 + 49 - 2}$$

$$S_p^2 = \frac{9(63)+(16)(48)}{111} = \frac{567+768}{111}$$

$$= \frac{1335}{111} = 12.03 \Rightarrow S_p = \sqrt{12.03} = 3.47$$

ثم نجد $T_{المحسوبة}$ من العلاقة :

$$T_{المحسوبة} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{16-20}{3.47\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{1}{49}}} = \frac{-4}{3.47\sqrt{0.02+0.02}}$$

$$= \frac{-4}{3.47\sqrt{0.04}} = \frac{-4}{0.694} = -5.76$$

نجد $T_{\left[1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2\right]} = T_{[0.975,111]} = 1.99$

ونجد $T_{[1-\alpha,n_1+n_2-2]} = T_{[0.95,111]} = 1.663$

وبعد إعداد هذه البيانات نبدأ بالإجابة على أجزاء السؤال.

a) عندما يكون $H_0:\mu_1 \neq \mu_2$ وبما أن $-1.99 > -5.7$, $-5.76 < 1.99$ فإننا نرفض H_0 على مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$.

b) وعندما $H_1:\mu_1 \neq \mu_2$ وبما أن

$$T_{المحسوبة} < T_{الجدولية} \Rightarrow -5.76 < 1.663$$

فإننا نقبل H_0 على مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$.

c) وعندما يكون $H_1:\mu_1 < \mu_2$ وبما أن :

$$T_{المحسوبة} \not> -T_{[1-\alpha,n_1+n_2-2]} \Rightarrow -5.76 \not> -1.663$$

فإننا نرفض H0 على مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$.

8-4 : اختبار الفرضيات للنسبة :

إن اختبارات الفرضيات التي لها علاقة بالنسب مطلوبة في عدة مجالات فعادة يهتم السياسيون بمعرفة نسب الناخبين الذين سيصوتون معهم في الانتخابات القادمة وكذلك يهتم الصناعيون بمعرفة نسب التالف في إنتاجهم وهكذا وسنعتبر مسألة اختبار الفرضيات في نسبة النجاح في تجربة ذات الحديثين مساوية لـ $H_0:P \neq P_0$ حيث أن ؛ هي نسبة النجاح وستكون الفرضية المقابلة أما $H_1:P \neq P_0$ أو $H_1:P > P_0$ أو $H_1:P < P_0$ والآن نورد النظرية التالية :

نظرية (4-8) : إذا كانت قيم المشاهدات التالية $x_1, x_2, \ldots, x_n$ لعينة عشوائية تخضع لتوزيع ذات الحدين $b(x, n, p)$ وكانت حجمها كبير وأردنا اختبار $H_0: P = P_0$ مقابل.

a) إذا كانت $H_1: P \neq P_0$ فإننا نقبل H_0 إذا كانت $Z_{\text{المحسوبة}}$ تقع على النحو :

$$-Z_{\text{الجدولية}\, 1-\frac{\alpha}{2}} < Z_{\text{المحسوبة}} = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} < Z_{\text{الجدولية}\, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

b) وإذا كانت الفرضية البديلة $H_1: P > P_0$ فإننا نقبل H_0 على مستوى الدلالة α عندما تكون

$$Z_{\text{المحسوبة}} < Z_{\text{الجدولية}\, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

c) أما إذا كانت الفرضية البديلة $H_1: P < P_0$ فإننا نقبل H0 على مستوى الدلالة α عندما تكون

$$Z_{\text{المحسوبة}} > -Z_{\text{الجدولية}\, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

مثال (8- 8) : يدعي صياد بأنه يصيب 75% من الطيور التي يطلق عليها النار فهل توافق هذا الادعاء. إذا كان في يوم ما قد أسقط 80 طيرا من أصل 120 طيرا أطلق عليها النار مستخدما $\alpha = 0.05$.

الحل : نحدد المعطيات في السؤال :

a) $H_0: P = 0.75$ b) $H_1: P \neq 0.75$ c) ثم نجد $\alpha = 0.67$.

نجد أولا $Z_{\text{المحسوبة}}$ من العلاقة التالية :

$$Z_{\text{المحسوبة}} = \frac{0.67 - 0.75}{\sqrt{\frac{(0.75)(0.25)}{120}}} = \frac{-0.18}{\sqrt{0.00156}} = \frac{0.18}{0.04} = 4.5$$

نجد $Z_{\text{الجدولية}\, 0.975} = 1.96$

بما أن $|Z_{\text{المحسوبة}}| \not> 1.96$ لذا نرفض H_0 على مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ أي أننا لا نوافق الأدعاء.

8-5 : اختبار الفرضيات للفرق بين نسبتين :

نظرية (5 -8) : إذا كانت قيم المشاهدات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عينة عشوائية من توزعي ذات الحدين $b(x, n_1, P_1)$ وكانت قيم المشاهدات $y_1, y_2, \ldots, y_n$ من

توزيع ذات الحدين $b(x, n_2, P_2)$ وكانت العينتان مستقلتان عن بعضهما البعض وكانت n_1, n_2 كبيرتين وأردنا اختبار $H_0: P_1 - P_2 = 0$ مقابل.

a) إذا كانت $H_1: P_1 \neq P_2$ أو $H_1: P_1 - P_2 \neq 0$ فإننا نقبل H_0 إذا كان $|Z_{المحسوبة}| < Z_{الجدولية}$.

حيث

$$Z_{المحسوبة} = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{\frac{P(1-P_1)}{n_1} + \frac{P(1-P_2)}{n_2}}}$$

$P = \frac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2}$ ونرفضه عكس ذلك.

b) إذا كانت $H_1: P_1 > P_2$ فإننا نقبل H_0 على مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ إذا كانت $Z_{الجدولية} > Z_{المحسوبة}$.

c) إذا كانت $H_1: P_1 < P_2$ فإننا نقبل H_0 على مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ إذا كانت $-Z_{الجدولية} < Z_{المحسوبة}$.

مثال (9-8) : شركة لإنتاج التبغ توزع نوعين من التبغ ووجد من بين 200 مدخن وجد أن 56 يدخنون أو يفضلون النوع I وأن من بين 150 مدخن وجد أن 29 يدخنون النوع II فهل تستطيع أن تستنتج أن النوع I أكثر رواجا من النوع II ؟

الحل : نبدأ بتلخيص المعطيات :

$$n_1 = 200 ,\ n_2 = 150 ,\ P_1 = \frac{56}{200} = 0.28 ,\ P_2 = \frac{29}{150} = 0.19$$

$$P = \frac{n_1.P_1 + n_2.P_2}{n_1 + n_2} = \frac{(200)(0.28) + (150)(0.19)}{350} = \frac{56 + 28.5}{350}$$

$$= \frac{84.5}{350} = 0.24$$

نجد $Z_{المحسوبة}$ من العلاقة :

$$Z_{المحسوبة} = \frac{0.28 - 0.19}{\sqrt{\frac{(0.24)(72)}{200} + \frac{(0.24)(0.8)}{150}}} = \frac{0.09}{\sqrt{\frac{0.1728}{200} + \frac{0.1944}{150}}}$$

$$Z_{المحسوبة} = \frac{0.09}{\sqrt{0.000864 + 0.001310}} = \frac{0.09}{\sqrt{0.002174}} = \frac{0.09}{0.05} = \frac{9}{5} = 1.8$$

ثم نجـد $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ أي $1.645 = Z_{0.95}$ نريـد اختبـار $H_0:P_1 - P_2 = 0$ مقـابل $H_1:P_1 > P_2$ بما أن $Z_{المحسوبة} > Z_{الجدولية}$ فإننا نرفض H_0 ونقبل H_1 أي أن النوع I أكثر رواجا من النوع II.

8-6 : اختبار الفرضيات للتباين :

يعتبر اختبـار الفرضيـات للتبـاين مـن أهـم الاختبـارات وسـنتناول اختبـار التبـاين المساوي لقيمة معينة وكذلك الفرق بين تباينين.

8-6-1 : اختبار التباين المساوي لقيمة معينة :

نظرية (6- 8) : إذا أخذت عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ وأردنا اختبار $H_0:\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ فإننا نقبل H_0 إذا تحققت المتباينة التالية :

$$\frac{(n-1).S^2}{X^2_{\left[1-\frac{\alpha}{2},n-1\right]}} < \sigma^2 < \frac{(n-1).S^2}{X^2_{\left[\frac{\alpha}{2},n-1\right]}}$$

b) وإذا كانت الفرضية البديلة $H_1:\sigma^2 > \sigma_0^2$ فإننا نقبل H_0 على مسـتوى الدلالـة α إذا كان $\sigma^2 > \frac{(n-1).S^2}{X^2_{[1-\alpha,n-1]}}$.

c) أما إذا كانت الفرضية البديلة $H_1:\sigma^2 < \sigma_0^2$ فإننا نقبل H0 على مسـتوى الدلالـة α إذا كان $\sigma^2 < \frac{(n-1).S^2}{X^2_{[1-\alpha,n-1]}}$.

مثال (10-8) : مصنع لبطاريات السيارات يدعي أن عمـر البطاريـة لـها انحرفـا معياري 0.9 سنة وأخذت عينة حجمها 10 بطاريات من هذه البطاريات ووجـد أن الانحراف المعياري لها 1.2 سنة فهل تعتقد أن $\sigma > 0.9$ مستخدما مسـتوى معنويـة 0.05.

الحل : نحـدد المعطيـات $n=10$, $S=1.2$, $S^2=1.44$, $\sigma=0.9$, $\sigma^2=0.81$ ثـم نجـد قيمة $X^2_{[0.95,9]}$ ثم نكون الفرضية $H_0:\sigma^2=0.81$ مقابل $H_0:\sigma^2>0.81$ وبتطبيق العلاقة أعلاه.

$$\frac{S^2(n-1)}{X^2_{[1-\alpha,n-1]}}=\frac{9(1.44)}{16.92}=0.76$$

بما أن 076<081 ∴ نقبل H_0 على مستوى الدلالة$_\alpha$ ونستنتج انه لا يوجد سبب للشك بان الانحراف المعياري =0.9

8-6-2: اختبار الفرق بين تباينين:

نظرية(7-8): إذا اخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من توزيع طبيعي$N(\mu_1,\sigma^2{}_1)$ واخذت عينة أخرى حجمها n_2 من توزيع طبيعي$N(\mu_2,\sigma^2{}_2)$ وأردنا اختبار $H_0{:}\sigma^2{}_1=\sigma^2{}_2$ مقابل H_1 فإننا نقبل H_0 في الحالات التالية:

A) إذا كان $H_1:\ \sigma^2{}_1<\sigma^2{}_2$ وكان

$$F=\frac{S^2{}_1}{S^2{}_2}\Rightarrow F<f_{1-\alpha}[(n_1-1)(n_2-1)]$$

B) إذا كان $H_1:\ \sigma^2{}_1>\sigma^2{}_2$ وكان

$$F=\frac{S^2{}_1}{S^2{}_2}\Rightarrow F>f_{1-\alpha}[(n_1-1)(n_2-1)]$$

C) إذا كان $H_1{:}\sigma^2{}_1\neq\sigma^2{}_2$ وكان

$$F=\frac{S^2{}_1}{S^2{}_2}\Rightarrow F>f_{1-\frac{\alpha}{2}}[(n_1-1)(n_2-1)],F>f_{\frac{\alpha}{2}}[(n_1-1)(n_2-1)]$$

الفصل التاسع
تحليل التباين

الفصل التاسع

تحليل التباين

9-1 مقدمة :

لنفترض أننا بصدد تحليل إنتاج ثلاثة أنواع مختلفة من القمح مزروعة في ثلاثة قطع معينة لهذا الغرض نهتم باختبار الفرضية (العدمية) بأن الأنواع الثلاثة تنتج بالمعدل مقادير متساوية من القمح، ولاختبار ما إذا كان نوعين معينين من هذه الأنواع الثلاثة مختلفين بدرجة ثقة معينة نستطيع ذلك باختبار الفرضية بشكلها البسيط (الفرق بين متوسط الإنتاج في النوعين = صفر، مقابل $H_1:\mu_1?\mu_2$ أما لاختبار تساوي عدة متوسطات معا فهنالك طريقة تسمى تحليل التباين.

وطريقة تحليل التباين هذه هي طريقة لفصل الاختلاف الكلي (Total Variation) للمعطيات إلى أجزاء ومكونات تقيس مختلف مصادر هذا الاختلاف بشكل قابل للتعليل والربط بالسببية وفي تجربتنا في المثال الآنف الذكر نحصل على مكونيين (احداثيين) Components.

- الأول يقيس الاختلاف الذي يعود إلى خطأ التجربة Experimental Error.
- والثاني ناتج عن خطأ التجربة مضافا إليه الاختلاف الناجم عن الاختلاف بين نوعية القمح أنفسهما.

فإذا كانت الفرضية (H_0) صحيحة بمعنى أنه كل من النوعيات الثلاثة لها في المعدل إنتاج متشابه فإن أي من مقياسي الاختلاف السابقين هو مقياس منفصل لتبني واحد وهو الاختلاف الناجم عن خطأ التجربة، وعلى هذا فإننا نعتمد في اختبارنا على إيجاد مقارنة بين هذين المكونين بواسطة اختبار F.

وقد يعود الاختلاف المذكور إلى تفاوت في خشونة قطع الأرض المزروعة ولكننا بتخطيط محدد يمكننا التغلب على هذا النوع، باختيار قطع أرض متجانسة لإجراء التجربة وتعميم التجربة بشكل متكرر وعشوائي، أما في حالة الفشل في التغلب على هذا العامل الهام من عوامل الخطأ قد يقودنا ذلك إلى تقدير مبالغ فيه لخطأ التجربة وهذا يقودنا بالنتيجة إلى زيادة احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني.

وقد نستعمل في التجربة السابقة عاملا آخر هو التسميد، فيكون لدينا ثلاثة أنواع من القمح وثلاثة أنواع سماد مختلفة . عندها فإننا نواجه، اختبار فرضية ما إذا كان الاختلاف يعود إلى أنواع القمح، أم إلى أنواع السماد أو إلى كلاهما معا.

وفي هذه الحالة فإن تحليل التباين يمكننا من الحصول على طريقة لتقسيم الاختلاف الكلي (Total Variation) إلى ثلاث مكونات (احداثيات).

- **الأول :** يقيس خطأ التجربة فقط.
- **الثاني :** يقيس خطأ التجربة مضافا إلى الاختلاف الناجم عن تعدد أجناس القمح.

- **الثالث :** يقيس خطأ التجربة مضافا إلى الاختلاف الناجم عن تعدد أنواع السماد.

وعلى هذا فإن مقارنة المكون الثاني مع المكون الأول يقودنا إلى اختبار فرضية ما إذا كانت أنواع القمح المختلفة لها نفس الإنتاج بالمتوسط ومقارنة المكون الثالث مع المكون الأول يقودنا إلى اختبار فرضية عدم وجود اختلاف في الإنتاج باستعمال أنواع مختلفة من السماد.

- ويرى تصنيف المشاهدات بناء على عامل (Creterion) منفرد كما في تصنيف الإنتاج حسب نوع القمح يدعى تصنيف باتجاه واحد One-Way-Classification.
- أما إذا كانت المشاهدات مصنفة حسب عاملين كما في تصنيف الإنتاج حسب نوع القمح ونوع السماد يدعي تصنيف باتجاهين Tow-Way-Classification.

ويمكن الاستطراد في التصنيف حسب عوامل عديدة، وهذا يسمى التصنيف متعدد الاتجاهات Multi-Way-Classification. والآن سنتناول كل طريقة على انفراد.

9-2 : التصنيف الأحادي One-Way-Classification :

إذا اعتبرت عينات حجم كل منها من مجتمعات عددها n على فرض أن هذه المجتمعات مستقلة وموزعة توزيعا معتاد المتوسطات $\mu_1, \mu_2, ... \mu_k$ ولها نفس التباين نريد اختبار الفرضية $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$ مقابل الفرضية البديلة وهي على الأقل اثنين من هذه المتوسطات غير متساو أي $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 = ... = \mu_k$ والنوع X_{ij} يعبر عن المشاهدة التي ترتيبها i من المجتمع الذي رقمه j كما في الجدول (9-1).

المجتمعات / العينات	1	2	3	i	n
1	X_{11}	X_{12}	....		X_{1n}
2	X_{21}	X_{22}	....		X_{2n}
.				.	.
.				.	.
.				.	.
l	X_{i1}	X_{i2}	....		X_{in}
.				.	.
.				.	.
K	X_{k1}	X_{k2}	....		X_{kn}
	T_1	T_2	....		Tn
	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$	....		$\overline{X}_n$

جدول(9-1)

وكما هو مبين في الجدول(9-1)فإنT_j: هو تجميع لكل المشاهدات في المجتمع الذي رقمه j ، $\overline{X}_j$ هو متوسط كل المشاهدات في العينة المأخوذة من المجتمع Tj : هو مجموع المجاميع كلها في $n \times k$ من المشاهدات.

$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2 + n\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{X}_i-\overline{X}\right)$: هو متوسط كل المشاهدات في $n \times k$ من المشاهدات وأن أي من هذه المشاهدات يمكن كتابتها كما يلي :

$$X_{ij} = \mu_x + S_{ij}$$

حيث S_{ij} تقيس انحراف المشاهدة التي رقمها (I) عن وسط المجتمع المقابل أو :

$$\mu_x = \mu + \alpha_j$$

حيث أن μ هي بالتعريف تساوي متوسط جميع المشاهدات يعني :

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^{n}\mu_j}{n}$$

وعليه فإننا نستطيع كتابة $X_{ij} = \mu + \alpha_j + S_{ij}$

وبما أن $\alpha_j = 0$ فإننا نسمي α بأثر المجتمع

ويمكن أن نعبر عن الفرضية الصفرية والفرضية البديلة على النحو التالي :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$ مقابل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 = ... = \mu_k$ وكذلك بالنسبة للصفوف.

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k$ مقابل $H_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2 = ... = \alpha_k$

H_1 على الأقل واحدة من α لا تساوي الصفر.

ويعتمد الاختبار على مقارنة مقدرين مستقلين لتباين المجتمع σ^2 وهذان المقدران يمكن حسابهما بتقسيم إمكانية الاختلاف Variability للمعطيات إلى مكونين ويكون تباينا لمشاهدات المرتبة في عينة حجمها nk هو :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Xij-\overline{X}\right)^2}{nk-1}$$

وإشارة التجميع المزدوج تعني أننا نجمع مربعات فروق القيم باعتبار j يتغير n ... 2, 1 وكذلك تتغير قيمة لكل من قيم لـ الذي يتغير من n-1 ويسمى البسط لقيمة S^2 مجموع المربعات الكلي أي SST.

والذي يقيس الاختلاف الكلي للمعطيات ويمكن تقسيمه كما يلي :

نظرية (9-1) : إن مجموع مربعات (9-3) يمكن تقسيمها إلى قسمين على النحو :

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\overline{X}_{i.}\right)^2 + n\sum_{i=1}^{k}\left(X_{i.}-\overline{X}\right)^2$$

وهنا $\overline{X}_i$ تعني الوسط الحسابي للعينة المأخوذة من المجتمع الذي ترتيبه i يعني

$$X_{i.} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}$$

الإثبات : في العلاقة (9-3) فإن مجموع المربعات يمكن كتابته على النحو :

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(X_{ij}-\overline{X}_{i.}\right)+\left(\overline{X}_{i.}-\overline{X}\right)\right]^2$$

وبفك القوس أعلاه وتوزيع رمز المجموع ينتج أن :

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\overline{X}_{i.}\right)^2=2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\overline{X}_{i.}\right)\left(\overline{X}_{i.}-\overline{X}\right)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{X}_{i.}-\overline{X}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\overline{X}_{i.}\right)^2=2\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\overline{X}_{i}-\overline{X}\right)\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{X}_{ij}-\overline{X}_{i.}\right)\right]+n\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{X}_{i.}-\overline{X}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2+n\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{X}_{i.}-\overline{X}\right)$$

ولكون $\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\overline{X}_{i.}\right)$ لكل قيم I وبهذه النتيجة يتم إثبات النظرية ويمثل الطرف الأيسر من المساواة في نظرية (9-1) مجموع المربعات الكلـي والـذي سنرمز لـه بـالرمز SST. والحد الأول من الطـرف الأيمـن يمثـل مجمـوع مربعـات الخطـأ والذي سنرمز لـه بـالرمز S.S.E (Sum Squares of Errors) وقد نسـمي هـذا أيضـا مجمـوع مربعـات الانحرافـات. أمـا الحـد الثاني فتمثل مجموع المربعات بيـن الأعمـدة والـذي سـنرمز لـه. SSC (Sum Squares of Column) وقد يسمى من قبل بعـض المؤلفين SSE خطـأ المعـاملات Treatment Sum of Squares.

من الأعمدة تمثل المعاملات المختلفة التي عددهاnمن المجتمعات والممثلة kعلى اعتبار أن من المشاهداتK هي $X_{ij} = 1, 2, \dots, k ; j = 1, 2, \dots, n$ ، i وعلى هذا فإن المشاهدات k من المعاملات، ونعني بالمعاملة بشكل عام لمختلف التصنيفات سواء أكان lأو القياسات ل ذلك محللين مختلفين مثل : أسمدة مختلفة، منتجين مختلفين، قطاعات مختلفة من صناعة معينة، ألوية مختلفة من بلد ما.

وكما سبق ذكره يلزمنا مقدرين للتباين σ^2 = أحدها يعتمد على k-1 درجات حرية وهو :

$$S_1^2=\frac{SSC}{k-1}$$

فإذا كانت H_0 صحيحة فإن S_1^2 مقدر غير متحيز σ^2 وإذا كان H_1 صحيح فإن SSE تكـون لـه قيمة أكبر ويكون تقدير S_1^2 ، σ^2 مبالغ فيه.

والأخر وهو مقدر مستقل لـ σ^2 ويعتمد على k (n-1) درجات حرية وهو :

$$S_2^2=\frac{SSE}{k(n-1)}$$

ويكون هذا المتغير غير متحيز سواء أكانت H_0 صحيحة أم H_1 صحيحة.

= ويلاحظ أيضا أن مجموع المربعات قد قسمت الاختـلاف وبنفس الوقت قسمت درجـات الحرية :

nk-1=k-1+k(n-1)

وكخطوة أخيرة نحسب :

$$F_{\text{المحسوبة}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

فعندما H_0 : صحيحة فإن قيم المتغير العشوائي F توزع توزيع فيشر بدرجات الحرية $F_\alpha\,[k-1, k(n-1)]$ وبما أن S_1^2 تبالغ في تقدير σ^2 عندما H_0 غير صحيحة فإن لدينا لاختبار بطرف واحد ومنطقة حرجة واقعة كليا على يمين التوزيع وعلى هذا فإن الفرضية H_0 ترفض بدرجة معنوية α عندما

$$F_{\text{المحسوبة}} > F^{\text{الجدولية}}_{[\alpha, k-1(n-1)]}$$

وقد جرت العادة في التطبيقات العملية أن نحسب أولا SST ثم SSC وتستعمل المعادلة SSE = SST – SSC لحساب SSE.

ويستحسن استعمال هذه المعادلة لحساب القيم السابقة :

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 - \frac{T_{..}}{nk}$$

$$SSC = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T_{ij}^2 - \frac{1}{nk}T_{..}^2$$

ونلخص جدول التباين (2-9) على النحو التالي :

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسطات المربعات	$F_{\text{المحسوبة}}$
بين الأعمدة	SSC	$n-1$	$S_1^2 = \frac{SSC}{n-1}$	$= \frac{S_1^2}{S_2^2}$
الخطأ	SSE	$k(n-1)$	$S_2^2 = \frac{SSE}{k(n-1)}$	
المجموع الكلي	SST	$nk-1$		

جدول(2-9)

مثال (1-9) : البيانات التالية تبين خمس عينات عشوائية حجم كل عينة 5 مفردات مأخوذة من مجتمعات تتوزع توزيعا طبيعيا مستقلة عن بعضها البعض ذات أوساط حسابية $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ وتباين مشترك σ^2 والمطلوب اختبار $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots\dots\dots = \mu_5$

مقابل $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 = \ldots\ldots\ldots = \mu_5$ على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ والجدول (3-9) يمثـل هذا البيانات :

	1	2	3	4	5	
	7	9	3	2	7	
	4	7	5	3	6	
	9	8	2	4	9	
	6	6	3	1	4	
	7	9	7	4	7	
المجموع	26	39	20	14	33	132
المتوسط	5.2	7.9	4	2.8	6.6	5.28

جدول(3-9)

الحل : نتبع الخطوات التالية :

1) نضع الفرضية العدمية $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ وكذلك الفرضية البديلة $\mu_1 \neq \mu_2$ $.H_1: = \mu_3 = \mu_4 = \mu_{50}$

2) نحدد مستوى الثقة وسنأخذ $\alpha = 0.05$.

3) نجد F الجدولية حيث أن حيث أن $F_{[\alpha\ ,\ 4.20]} = 2.87$

4) نجد F المحسوبة وذلك من خلال تكوين جدول تحليل التباين.

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right)^2}{nk}$$

$$= 5^2 + 4^2 + 8^2 + \ldots\ldots\ldots + 4^2 + 7^2 - \frac{(132)^2}{25}$$

$$= 834 - 696.96 = 137.04$$

نجد

$$SSC = \frac{(26)^2 + (39)^2 + (20)^2 + (14)^2 + (33)^2}{5} - \frac{(132)^2}{25}$$

$$= 776.4 - 696.96 = 79.44$$

ثم نجد :

$$SSE = SST - SSC = 137.04 - 79.44$$
$$= 57.60$$

ثم نقوم بعملية تلخيص جدول التباين (4-9)

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسطات المربعات	$F_{\text{المحسوبة}}$
بين الأعمدة	79.44	4	19.86	$=\frac{19.86}{2.88}=6.896$
الخطأ	57.6	20	2.88	
المجموع الكلي	137.04	24		

جدول(9-4)

5) نبدأ المقارنة ونقول بما أن $F_{\text{الجدولية}} < F_{\text{المحسوبة}}$ أي $2.87 < 6.896$ لذا ترفض H_0 والقائلة بأن المتوسطات متساوية وكثير ما نتعرض في الحياة العملية إلى ما يعرف بفقدان بعض البيانات أو استحالة وضع المشاهدات لعدد من مفردات العينة مثلاً موت بعض حيوانات التجربة وفي مثال آخر لتجربة مصممة لمقارنة مستويات الطلبة في شعب كانت متساوية من حيث الطلاب انسحب قسم منها وفي مثل هذه الحالات نجري تحليل التباين بالطريقة المعتادة ولكن بدلاً من عدد المفردات يمكن وضع هذه البيانات على شكل nk ويمكننا تعديل هذا العدد حسب الظروف الجديدة الطارئة بتعريف $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_n$ ونحسب

$$X^2_{\alpha,k}$$

$$SSC = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

أما بالنسبة لدرجات الحرية.

فدرجات الحرية لـ SST هي $n - 1$.

ودرجات الحرية SSC هي $k - 1$.

ودرجات الحرية للخطأ SSE هي $n - k$.

مثال (9-2) : اختبر الفرضية H_0 بمستوى دلالة $\alpha = 0.05$ للبيانات الواردة في جدول (9-5) حيث أن $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

	a_1	a_2	a_3	
	4	5	8	
	7	1	6	
	6	3	8	
	6	5	9	
		3	5	
		4		
المجموع	23	21	36	80

جدول(9-5)

الحل : باتباع الخطوات السابقة.

1) نضع الفرضية $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ مقابل $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3$.

2) نجد $F_{\text{الجدولية}}$ وذلك $F(0.05, 2, 12) = 3.89$

3) نبدأ بالحسابات التالية :

$$SST = (4)^2 + (7)^2 + (6)^2 + \ldots\ldots + (9)^2 + (5)^2 - \frac{80}{15}$$

$$= 492 - 426.667 = 65.333$$

$$SSC = \frac{(23)^2}{4} + \frac{(21)^2}{6} + \frac{(36)^2}{5} + \frac{(80)^2}{15}$$

$$= 38.283$$

$$SSE = SST - SSC = 65.333 - 38.283 = 27.0$$

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسطات المربعات	$F_{\text{محسوبة}}$
بين الأعمدة	38.283	3 − 1 = 2	19.142	
الخطأ	27.05	15 − 3 = 12	2.254	
المجموع الكلي	65.333	15 − 1 = 14		$F_{\text{محسوبة}} == \frac{\quad}{2.254} = 8.49$

جدول (6-9)

بما أن $F_{\text{الجدولية}} < F_{\text{المحسوبة}}$ أي $3.89 < 8.49$ فإننا نرفض H_0 علـى مستوى الدلالـة $\alpha = 0.05$ ونستنتج أن المتوسطات غير متساوية.

ملاحظات هامة :

يلاحظ مما سبق :

- أنه في حالة تساوي حجم العينـات المـأخوذة من الجـهات المختلفة فإن قيم $F_{\text{المحسوبة}}$ غير حساسة للفرض بتساوي σ^2 للمجتمعات المختلة لأن حجم الفئات متساوية.
- اختبار عينات متساوية يقلل من احتمال الوقوع في الخطأ II.
- سهولة الحسابات في حالة تساوي حجم العينات.

9-3 : اختبار تساوي مختلف التباينات

Test for the Equality of Several Variances

ذكرنا فيما سبق أن نسبة $F_{\text{المحسوبة}}$ من تحليل التباين لا تتأثر سلبيا بفرضية تساوي التبـاين فـي المجتمعات التي عددها n والتي أخذت منها عينات متساوية الحجم، ولكن هذه ليست الحالـة عندما تكون حجوم البيانات مختلفة، وفي هذه الحالة نريـد اختبـار فرضيـة مـا إذا كـانت هـذه المتباينات متساوية.

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_n^2$ مقابل الفرضية الجديدة . $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 = ... = \sigma_n^2$

ويسمى هذا الاختبار Bartlett's test بارتلت والذي يعتمد على إحصاء له توزيع عينة يقارب توزيع X^2 عندما نسحب عينات عددها n من مجتمعات معتادة مستقلة.

والخطوات المتبعة كما يلي :

1) نحسب $S_1^2 = S_2^2 = ... = S_n^2$ أي من n من العينات التي أحجامها $n_1, n_2, \ldots, n_n$

$n_1 + n_2 + \ldots + n_n$ ثم نحسب التباين التجميعي من العلاقة :

$$S_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(n_k - 1)S_k^2}{n-k}$$

$$b = 2.3026.\frac{f}{h}$$

$$f = (n-k)\log S_a^2 - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\log S_i^2$$

$$h = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n-k}\right]$$

وهنا يكون للمتغيرة العشوائي b توزيع X^2 بدرجات الحرية ك - 1 وتكون قيم b كبيرة عندما تبتعد التباينات عن بعضها من حيث القيم وتساوي صفر عند تساوي التباينات، وعلى هذا نرفض فرضية H_0 ، بمستوى معنوية α عندما $b > X^2_{\alpha,k}$.

مثال : اختبر فرضية تساوي التباينات في المجتمعات الثلاثة التي أخذت منها العينات في المثال السابق :

الحل :

1) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$.

2) $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 = \sigma_3^2$.

3) $\alpha = 0.05$.

4) المنطقة الحرجة $X^2_{x,n-1} = 5.991$.

5) الحسابات $n_1 = 4 , n_2 = 6 , n_3 = 5 , k = 3$.

العينة الأولى $X = 4, 7, 6, 6$ ، $\overline{X} = 5.75$ ثم نجد تباين كل عينة على حدة من علاقة التباين :

$$S_1^2 = \frac{(0.25)}{}$$

وبالمثل نجد باقي التباينات $S_1^2 = 1.5833,\ S_2^2 = 2.3,\ S_3 = 2.7$

6) النتيجة بما أن $0.213 < 5.991$ نقبل H_0 ونستنتج أن التباينات الثلاثة للمجتمعات التي عددها n والتي أخذت منها العينات متساوية.

9-4 التصنيف باتجاهين ومشاهدة واحدة في كل خلية

يبين لدينا الجدول المزدوج التالي الذي يبين توزيع المحصول حسب ثلاثة أنواع ثلاثة أنواع مختلفة من القمح عوملت بأربعة أنواع من الأسمدة المختلفة

أنواع القمح

الأسمدة	C_1	C_2	C_3	
M_1	64	72	74	210
M_2	55	57	47	159
M_3	59	66	58	183
M_4	58	57	53	168
	236	252	232	720

جدول(9-7)

يمكن بشكل عام كتابة جدول في مثل هذه الحالة لأعمدة عددها n ولأسطر عددها k

	الأعمدة		
السطور	1 2 3 ....j.....n		
1	$X_{11}\ X_{12}\ X_{13}...X_{1j}...X_{1n}$	$T_{1.}$	$\bar{X}_{1.}$
2	$X_{21}\ X_{22}\ X_{23}...X_{2j}...X_{2n}$	$T_{2.}$	$\bar{X}_{2.}$
3	$X_{31}\ X_{32}\ X_{33}...X_{3j}...X_{3n}$	$T_{3.}$	$\bar{X}_{3.}$
	....		
	....		
i	$X_{i1}\ X_{i2}$ ....X_{in}	$T_{i.}$	$\bar{X}_{i.}$
	....		
	....		
m	$X_{m1}\ X_{m2}$ ....X_{mn}	$T_{m.}$	$\bar{X}_{m.}$
	$T_{.1}\ T_{.2}\ T_{.3}.....T_{.j}.....T_{.n}$ $\bar{X}_{.1}\ \bar{X}_{.2}\ \bar{X}_{.3}.....\bar{X}_{.j}.....\bar{X}_{.n}$		$T_{..}$ $\bar{X}_{..}$

جدول(9-8)

وسنستخرج فيما يلي بعض القوانين التي ستمكننا من اختبار ما إذا كان التفاوت في المحصول سببه الاختلاف في نوع القمح أم في طريقة التسميد أم في كلاهما معا.

وعلى فرض أن X_{ij} هي قيم مستقلة للمتغير العشوائي لها توزيع طبيعي بمتوسط μ_{ij} وتباين مشترك σ^2 فإننا سنعطي أيضا بعض التعريفات للرموز المعطاة

هي متوسط المحصول في السطر i $\quad \overline{X}_{i.}$:

$$\mu_{i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \mu_{ij}}{k}$$

مجموع المحصول في السطر i $\quad T_{i.}$:

مجموع المحصول في العمود j $\quad T_{.j}$:

متوسط المحصول في العمود j $\quad \overline{X}_{m.}$:

متوسط المجتمع للعمود الذي رقم j هو

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \mu_{ij}}{c \times r}$$

لمتوسط الكلي لمتوسطات المجتمع $k \times n$ هو

ولكي نقرر ما إذا كان الجزء من التفاوت يعود إلى تأثير أنواع القمح المختلفة نضع الفرضية التالية

$$H'_0 : \mu_{1.} = \mu_{2.} = \dots\dots\dots\dots = \mu_{k}$$

$$H'_1 : \mu_{1} = \mu_{2.} \neq \mu_{3.} \neq \dots\dots \neq \mu_{k}$$

ولكي نقرر ما إذا كان الجزء من التفاوت يعود إلى تأثير أنواع السماد

$$H''_0 : \mu_{.1} = \mu_{.2} = \dots\dots = \mu_{.n}$$

$$H''_1 : \mu_{.1} = \mu_{.2} \neq \mu_{.3} \neq \dots\dots \neq \mu_{.n}$$

ومعلوم أن أي من المشاهدات يمكن كتابتها كما في

$$X_{ij} = \mu_{ij} + S_{ij}$$

حيث S_{ij} تقيس الانحراف بين القيم المشاهدة X_{ij} ومتوسط المجتمع أو

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

حيث α_i: هو تأثير السطر i

β_j: تأثير العمود j

ويفترض أن تأثير العمود وتأثير السطر تقبل عملية الجمع وعليه

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + S_{ij}$$

بشرط أن

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{c} \beta \Rightarrow$$

$$\mu_{i.} = \frac{\sum(\mu + \alpha_i + \beta_j)}{c} = \mu + \alpha_i$$

$$\mu_{.j} = \frac{\sum(\mu + \alpha_i + \beta_j)}{r} = \mu + \beta_j$$

وتصبح طريقة صياغة الفرضية السابقة بالشكل التالي

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$$
$$H_1 : \alpha_1 = \alpha_2 \neq .... \neq \alpha_r = 0$$

وهذا هو تأثير السطور

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_j = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 = \beta_3 .... \beta_j \neq 0$$

وكل من هذه الاختبارات مبني على مقارنة مقدرات مستقلة لتباين المجتمع σ^2
وذلك بعد أن نفصل مجموع مربعات الانحرافات للقيم إلى ثلاث مكونات

$$SST = SSR + SSC + SSE$$

الآن نقدم علاقات رياضية تساعد في إيجاد كل مكون على حدى.

$$SST = \sum x^2_{ij} - \frac{T^2}{cr}$$

$$SSR = \sum_{i=1}^{r} \frac{T_i^2}{c} - \frac{T^2}{cr}$$

$$SSc = \sum_{j=1}^{c} \frac{T^2_j}{r} - \frac{T^2}{cr}$$

$$SSE = SST - SSR - SSC$$

$$SST \Rightarrow cr-1$$
$$SSR \Rightarrow r-1$$
$$SSC \Rightarrow c-1$$
$$SSE \Rightarrow (r-1)(c-1)$$

ولتقديرس^2 والذي سيكونS^2 لكل من المجاميع ويعتمد على درجة الحرية المقابلة

$$S^2{}_1 = \frac{SSR}{r-1}$$

وعليه فلسطور

فإذا كانت تأثيرات(effect)السطور

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_i = 0$$

فان ع$^2{}_1$ هو مقدر غير متحيز ل σ^2 أما إذا كانت التأثيرات ليست كلها=صفر فإننا نحصل على تقدير مبالغ فيه لσ^2 بواسطة $S^2{}_1$

والمقدر الثاني لσ^2 هو S^2 والذي يعتمد على n-1 من درجات الحرية حيث

$$S^2{}_2 = \frac{SSC}{c-1}$$

وهذا المقدر غير متحيز لS^2 إذا كانت

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_j = 0$$

وإلا فانه يبالغ في تقدير σ^2

والمقدر الثالث هو $S^2{}_3$ بدرجات حرية (r-1)(c-1) وهو مستقل عن $S^2{}_1$،$S^2{}_2$ حيث

$$S^2{}_3 = \frac{SSE}{(r-1)(c-1)}$$

هو غير متحيز مهما كان الأمر عن عدم صحة الفرضيات ولاختبار الفرضية التي تنص على أن تأثير السطور =صفر نحسب F_1 من العلاقة

$$F_1 = \frac{S^2{}_1}{S^2{}_3}$$

وهي قيمة المتغير العشوائيF الذي له توزيع فيشر بدرجات حرية

$$F_1 < F_\alpha[(r-1),(r-1)(c-1]$$

$$F_1 > F_\alpha[(r-1),(r-1)(c-1)]$$

ونرفض الفرضية H_0 بمستوى المعنوية α عندما
وبالمثل نختبر الفرضية بأن تأثير الأعمدة= صفر بحساب

$$F_2 = \frac{S^2{}_2}{S^2{}_3}$$

حيث F_2 لها توزيع فيشر بدرجات حرية (c-1),(r-1)(c-1)
وعليه فإننا نقبل H_0 عندما

$$F_2 < F_\alpha[(c-1),(c-1)(r-1)]$$

ونرفض الفرضية H_0 عندما

$$F_2 > F_\alpha[(c-1),(c-1)(r-1)]$$

ملاحظة: كما في التصنيف باتجاه واحد فان تقسيم مكونات التفاوت يقسم أيضا درجات الحرية
والآن نكتب جدول (9-9) للتباين

مصدر التفاوت	مجموع المربعات	متوسط المربعات	درجات الحرية	F المحسوبة
بين الصفوف	SSR	$S^2{}_1 = \frac{SSR}{r-1}$	$r-1$	$F_{1c} = \frac{S^2{}_1}{S^2{}_3}$
بين الأعمدة	SSC	$S^2{}_2 = \frac{SSC}{c-1}$	$c-1$	$F_{2c} = \frac{S^2{}_2}{S^2{}_3}$
الخطأ	SSE	$S^2{}_3 = \frac{SSE}{(r-1)(c-1)}$	$(r-1)(c-1)$	
الكلي	SST		$rc-1$	

جدول(9-9)

مثال(9-4): البيانات التالية تمثل الكميات المنتجة عند استعمال أنواع مختلفة من القمح وأنواع مختلفة من السماد

أنواع القمح

الأسمدة	C_1	C_2	C_3	
M_1	64	72	74	210
M_2	55	57	47	159
M_3	59	66	58	183
M_4	58	57	53	168
	236	252	232	720

جدول(10-9)

1)اختبر الفرضية بمستوى معنوية$\alpha=0.05$ ما إذا كان هنالك فرق في إنتاج القمح عند استعمال أنواع مختلفة من السماد.
2) اختبر الفرضية بأنه لا يوجد فرق بالمتوسط في إنتاج القمح في الأنواع الثلاثة.

الحل:نفرض أن تأثير السطور والأعمدة يساوي صفرا اي

$$1)H_0':\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0,$$
$$H_0'':\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$$

مقابل الفرضية البديلة

$$2)H_1':\alpha_1\neq\alpha_2=\alpha_3\neq 0$$
$$H_1'':\beta_1\neq\beta_2=\beta_3\neq 0$$

نحدد مستوى المعنوية

$$3)\alpha=0.05$$

نحسب قيم F الجدولة لكل اختبار على حدى

$$4)F_{1t}=F_\alpha[(r-1),(r-1)(c-1)]$$
$$=F_{0.05[3,6]}=4.7621$$
$$F_{2t}=F_\alpha[(c-1),(r-1)(c-1)]$$
$$F_{2t}=F_{0.05}[2,6]=5.14$$

مع ملاحظة أن F_{2t},F_{1t} تعني القيمة الجدولية لـF وسنرمز للقيمة المحسوبة لـ F بالرمز F_{1c},F_{2c} وسنقوم بحساب مجاميع المربعات من العلاقات أعلاه .

$$5) SST = (64)^2 + (55)^2 + ... + (53)^2 - \frac{(720)^2}{12}$$

$$SSR = \frac{(210)^2 + (159)^2 + (183)^2 + (168)^2}{3} - \frac{(720)^2}{12} = 498$$

$$SSC = \frac{(236)^2 + (252)^2 + (232)^2}{4} - \frac{(720)^2}{12} = 56$$

$$SSE = 662 - 498 - 56 = 108$$

ثم نكون جدول تحليل التباين(9-11)

مصدر التفاوت	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسطات المربعات	F_c
بين السطور	498	3	166	$F_{1c}=9.23$
بين الأعمدة	56	2	28	$F_{2c}=1.53$
الخطأ	108	6	18	
الكلي	662	11		

جدول(9-11)

$6) 9.22 > 4.76 \Rightarrow F_{1C} > F_{1t}$

ونستنتج وجود اختلاف في المتوسط في إنتاج القمح عند استعمال أنواع مختلفة من السماد

$1.56 < 5.14 \Rightarrow F_{2C} < F_{2t}$

فإننا نقبل H^1_0 ونستنتج عدم وجود اختلاف في متوسط الإنتاج للأنواع الثلاثة من القمح.

9-5 : التصنيف باتجاهين لعدة مشاهدات في الخلية

two-way Classifications, Several observations per cell

افترضنا في الفصل السابق أن تأثير السطور وتأثير الأعمدة تنطبق عليه خاصة الانجماع بمعنى أن باستطاعتنا كتابة

$\mu_{ij} - \mu_{ij'} = \mu_{i'j} - \mu_{i'j'}$

بمعنى أن الفرق بين متوسطات المجتمع للأعمدة j,j' هو نفسه لأي من السطور والفرق بين متوسطات المجتمع لأي من السطور i,i' هو نفسه لأي من الأعمدة، وبالعودة إلى مثال أنواع القمح المعاملة بالأسمدة نستطيع القول مما تقدم بأنه لو كانت النوعية C_2 تنتج بالمعدل 5 وحدات من القمح للدونم اكثر من النوعية C_1 عند استعمال M_1 من الأسمدة ،عندها فان C_2 تنتج بالمعدل 5 وحدات من القمح اكثر من C_3 عند استعمال M_2, M_3, M_4 .

وبالمثل لو أن C_1 تنتج 3 وحدات من القمح للدونم باستعمال M_2 أكثر منها عند استعمال M_4 عندها فان C_2 أو C_3 ستنتج أيضا 3 وحدات من القمح اكثر عند استعمال M_2 بدلا من M_4 وفي كثير من التجارب فان فرض القابلية للانجماع لا يتحقق وتحليل الجدول كما في الطريقة السابقة قد يقود إلى استنتاج خاطئ.

فعلى فرض أن النوع C_2 ينتج 5 وحدات للدونم من C_1 عند استعمال M_1 ولكنه ينتج 2 وحدة اكثر من C_1 عند استعمال M_1 ولكنه ينتج 2 وحدة اكثر من C_1 عند استعمال M_2.عند ذلك نقول بان أنواع القمح وأنواع الأسمدة تتفاعل فيما بينها تفاعلا بينيا

مثال(5-9): بالعودة للمثال (12-9)

الأسمدة	C_1	C_2	C_3	
	أنواع القمح			
M_1	64	72	74	210
M_2	55	57	47	159
M_3	59	66	58	183
M_4	58	57	53	168
	236	252	232	720

جدول(12-9)

نستطيع بنظرة فاحصة أن نتبين أن هنالك ما يسمى بالتفاعل البيني يعود إلى الخطأ التجريبي وإذا ما كان التفاوت في هذه المعطيات يتالف جزئيا من تأثير التفاعل البيني فان مصدر التفاوت هذا يبقى يشكل جزاء من مجموع المربعات ويؤدي بدوره إلى تقدير σ^2 بشكل مبالغ فيه ويزيد بدوره احتمال وقوع بالخطأII.

ولكي نختبر الفرق بين متوسطات السطور ومتوسطات الأعمدة عندما يكون عامل التفاعل البيني جوهريا فان علينا أن نحصل على تقدير مستقل وغير متحيز لـ$\sigma 2$ ولهذا الغرض نقوم بتفحص المشاهدات المتكررة والتي حصلنا عليها في ظروف مماثلة ولنفرض أن لنا الحق بالاعتقاد أن أنواع القمح وأنواع الأسمدة في المثال السابق تتفاعل فيما بينها فاننا نكرر التجربة مرتين مستعملين 36 قطعة بدلا من 12 ونقوم برصد المشاهدات كما في الجدول(9-9) ونقول أن التجربة مكررة ثلاث مرات.

وسنستخرج فيما يلي بعض القوانين التي ستمكننا من اختبار ما إذا كان التفاوت في المحصول سببه الاختلاف في نوع القمح أم في طريقة التسميد أم كلاهما.

وبما أن لدينا كما سبق r من السطور، c من الأعمدة فانه يكون لدينا هذه المرة بدلا من X_{ij} مجموعة من المشاهدات عددها n حيث$k=1,2......,n$ ويرمز لأي من المشاهدات (المكررة) X_{ijk} في rck من القيم وتكون أي عينة من الحجم n لها توزيع طبيعي بمتوسطμ_{ij} وتباين $_{\sigma}{}^{2}$ وكل ij من المجتمعات له σ^2 والآن نعطي الرموز التالية

$T_{ij.}$: مجموع المشاهدات في الخلية التي ترتيبها ij

$Ti..$:مجموع المشاهدات في السطور الذي ترتيبه I

$T_{.j.}$: مجموع المشاهدات في العمود الذي ترتيبه j.

$T_{...}$:مجموع المشاهدات والتي عددها rxcxn من المشاهدات

$\overline{X}_{ij.}$:متوسط المشاهدات في الخلية التي ترتيبها ij.

$\overline{X}_{i..}$:متوسط المشاهدات في السطر i

$\overline{X}_{.j.}$:متوسط المشاهدات في العمود j

$\overline{X}_{...}$:متوسط المشاهدات لعدد rxcxc من المشاهدات

ويمكن كتابة أية قيمة من المشاهدات على النحو:

$$X_{ijk} = \mu_{ij} + S_{ijk}$$

حيثS_{ijk} هي الانحرافات لقيم X_{ijk} عن وسط المجتمع μ_{ij} وإذا رمزنا للتفاعل البيني بين السطر i والعمود j بالرمز $(\alpha\beta)_{ij}$ ، α_i :تأثير السطر i،β_j تأثير العمود j ، μ المتوسط العام فان

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$$

وعلى هذا فان

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + S_{ijk}.$$

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = o, \sum_{j=1}^{c} \beta_j = 0, \sum_{i=1}^{r} (\alpha\beta)_{ij} = o, \sum_{j=1}^{c} (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

وعليه فإننا نختبر الفرضيات الثلاث التالية كما يلي:

1) $H'_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$

$H'_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2 = ... = \alpha_r \neq 0$

2) $H''_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$

$H''_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2 = ... = \alpha_r \neq 0$

3) $H'''_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$

$H'''_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2 = ... = \alpha_r \neq 0$

وحتى يتم الاختبارات نقدم أولا النظرية التالية

نظرية(2-9):

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}(X_{ijk} - \overline{X...})^2 = cn\sum_{i=1}^{r}(\overline{X_{i..}} - \overline{X...})^2 + rn\sum_{j=1}^{c}(\overline{X_{.j}} - \overline{X...})^2$$

$$+ n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(\overline{X_{ij}} - \overline{X_{i}} - \overline{X_{j.}} + \overline{X...})^2 + (X_{ijk} - \overline{X_{ij}})^2$$

من هنا نحصل على المعادلة التالية

$$SST = SSR + SSC + SS(rc) + SSE$$

حيث

$$SST = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} X^2_{ijk} - \frac{T^2_{...}}{ncr}$$

$$SSR = \frac{\sum_{i=1}^{r} T^2_{i..}}{nc} - \frac{T^2_{...}}{ncr}$$

$$SSC = \frac{\sum_{j=1}^{c} T^2_{.j.}}{nr} - \frac{T^2_{...}}{ncr}$$

$$SS(rc) = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} T^2_{ij.}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{r} T^2_{i..}}{nc} - \frac{\sum_{j=1}^{c} T^2_{.j.}}{rn} + \frac{T^2_{...}}{ncr}$$

$$SSE = SST - SSR - SSC - SS(rc)$$

أما بالنسبة لدرجات الحرية لكل من التفاوتات.

$$SST \rightarrow ncr - 1$$
$$SSR \rightarrow r - 1$$
$$SSC \rightarrow c - 1$$
$$SS(rc) \rightarrow (r-1)(c-1).$$
$$SSE \rightarrow rc(n-1)$$

ونقوم الآن بحساب متوسطات مجاميع المربعات.

$$S^2_1 = \frac{SSR}{r-1}\ , S^2_2 = \frac{SSC}{c-1},$$

$$S^2_3 = \frac{SS(rc)}{(r-1)(c-1)}, S^2_4 = \frac{SSE}{rc(n-1)}$$

ثم نقوم بحساب F المحسوبة لقيم التفاوتات

$$F_{1c} = \frac{S^2_1}{S^2_4}, F_{2c} = \frac{S^2_2}{S^2_4}$$

$$F_{3c} = \frac{S^2_3}{S^2_4}$$

ثم نحسب F الجدولية على النحو

$$F_{1t} = F_\alpha[(r-1), rc(n-1)], F_{2t} = F_\alpha[(c-1), rc(n-1)]$$
$$F_{3t} = F_\alpha[(r-1)(c-1), rc(n-1)]$$

وعليه فإننا نقبل

1) H_0' إذا كانت $F_{1t}>F_{1c}$ ونرفضها إذا كانت $F_{1t}<F_{1c}$

2) H_0'' إذا كانت $F_{2t}>F_{2c}$ ونرفضها إذا كانت $F_{2t}<F_{2c}$

3) H_0''' إذا كانت $F_{3t}>F_{3c}$ ونرفضها إذا كانت $F_{3t}<F_{3c}$

ويمكن تلخيص كل ما تقدم في الجدول التالي:

مصدر التفاوت	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسطات المربعات	ف المحسوبة
متوسطات السطور	SSR	$r-1$	$S^2{}_1 = \frac{SSR}{r-1}$	$F_{1c} = \frac{S^2{}_1}{S^2{}_4}$
متوسطات الأعمدة	SSC	$c-1$	$S^2{}_2 = \frac{SSC}{c-1}$	$F_{2c} = \frac{S^2{}_2}{S^2{}_4}$
التفاعل البيني	$SS(rc)$	$(r-1)(c-1)$	$S^2{}_3 = \frac{SS(rc)}{(r-1)(c-1)}$	$F_{3c} = \frac{S^2{}_3}{S^2{}_4}$
الخطأ	SSE	$rc(n-1)$	$S^2{}_4 = \frac{SSE}{rc(n-1)}$	
الكلي	SST	$rcn-1$		

جدول(9-13)

مثال(9-6): لدينا البيانات التالية

	أنواع القمح		
أنواع الأسمدة	C_1	C_2	C_3
M_1	64	72	74
	66	81	51
	70	64	65
M_2	65	57	47
	63	43	58
	58	52	67
M_3	59	66	58
	68	71	39
	65	59	42
M_4	58	57	53
	41	61	59
	46	53	38

جدول(9-14)

والمطلوب: اختبر الفرضية بمستوى معنوية.

A) لا يوجد فرق بين متوسط محصول القمح عند معاملته بأنواع الأسمدة المختلفة.

B) لا يوجد فرق بين متوسط الإنتاج لنوعيات القمح الثلاث.

C) لا يوجد تفاعل بيني بين أنواع السماد وأنواع القمح.

الحل: نكون أولا جدول المجاميع (9-15).

	C_1	C_2	C_3	المجموع
M_1	200	217	190	607
M_2	186	152	172	510
M_3	192	196	139	527
M_4	145	171	150	466
المجموع	723	736	651	2210

جدول(9-15)

ونتبع الخطوات سالفة الذكر.

1) نضع الفرضيات التالية

$$a) H'_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$
$$H'_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 \neq 0$$
$$b) H''_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$
$$H''_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 \neq 0$$
$$c) H'''_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$
$$H'''_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 \neq 0$$

2) نجد قيم F الجدولية على النحو

$$F_{1t} = F_{0.05}[3,24] = 3.01$$
$$F_{2t} = F_{0.05}[2,24] = 3.4$$
$$F_{3t} = F_{0.05}[6,24] = 2.51$$

3)نبدأ بحساب مختلف قيم المجاميع المطلوبة

$$SST = (64)^2 + (66)^2 + ... + (38)^2 - \frac{(2110)^2}{36} = 127448 - 123669 = 3779$$

$$SSR = \frac{(607)^2 + (510)^2 + (527)^2 + (466)^2}{9} - \frac{(2110)^2}{36} = 124826 - 123669 = 1157$$

$$SSC = \frac{(723)^2 + (736)^2 + (651)^2}{12} - \frac{(2110)^2}{36} = 124019 - 123669 = 350$$

$$SS(rc) = \frac{(200)^2 + (186)^2 + ... + (150)^2}{3} - 12486 - 124019 + 123669 = 771$$

ثم نلخص البيانات في جدول التباين (9-16).

مصدر التفاوت	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسطات المربعات	ف المحسوبة
متوسطات الأسطر	1157	3	385,667	1,17
متوسطات الأعمدة	350	2	175,00	2,8
التفاعل البيني	771	6	128,50	2,05
الخطأ	1501	24	62,542	
الكلي	3779	35		

جدول(9-16)

النتائج:

a) نرفض H_0' ونقول بأن هنالك فرق في متوسط المحاصيل عند معاملته بأسمدة مختلفة.

b) نقبل H_0'' ونقول انه لا يوجد فرق بين متوسطات محاصيل القمح للأنواع المختلفة.

c) نقبل H_0''' ونقول أنه لا يوجد تفاعل(تداخل) بين أنواع القمح المختلفة وأنواع الأسمدة المختلفة.

9-6 مناقشة لتصميم التجارب

تستعمل طريقة تحليل التباين لفصل التفاوت لمجموعة من البيانات التجريبية لمكونات تقيس مختلف مصادر التفاوت وتعتمد الخطوات التي تقود لهذه الطريقة من التحليل الإحصائي على تصميم التجربة لذا يلجأ الباحث في حل المسألة إلى تناسب تصميم تجربة تناسب طريقة التحليل التي يرى من الضرورة أن يتبعها.

وتعتبر ابسط طرق التصميم ،بالتصميم العشوائي الكامل Completely Random Design. وفي هذه الطريقة نعطي لكل معاملة Treatment الحق في التكرار بالتساوي. ونطبق على جميع مواد التجربة material وعلى سبيل المثال (إذا كانت التجربة لأنواع القمح في قطع ارض مقسمة ،يقال أن التصميم عشوائي كامل إذا طبق كل نوع من أنواع القمح على مختلف القطع وتحلل البيانات كما في القسم الأول).

أما إذا كانت المعاملات كمثل جميع الحالات الممكنة لعاملين مثل kحالة يمكن أن تستعمل فيها ثلاثة أنواع قمح مع أربعة أنواع أسمدة ومواد التجربة كبيرة بشكل يكفي لإعادة التجربة مرة أو اكثر على 12 حالة ممكنة في هذه الحالة تستخدم طريقة التحليل باتجاهين كما سبق شرحه .وتستعمل هذه الطريقة عندما يكون عدد المعاملات قليل ومواد التجربة متجانسة .

والطريقة الأخرى هي التصميم لمجموعات عشوائية Randomized Block Design وتتمثل هذه الطريقة بالخطوات التالية

1)تقسم مواد التجربة إلى مجموعات بحيث تكون وحدات كل مجموعة متجانسة في ما بينها .

2) نعتبر كل مجموعة(عضو) في هذه المجموعات كإعادة للمعاملة.

3) نطبق المعاملات (بالاختيار العشوائي) على كل وحدات كل مجموعة.

مثال(7-9):إذا كانت المعاملات تستعمل عاملا واحدا (منفرد) فان التحليل يكون تحليل تباين باتجاهين حيث السطور تمثل المجموعات والأعمدة تمثل المعاملات أما إذا كانت هنالك حالة تعدد العوامل فان التحليل هنا للتصميم لكل المجموعات العشوائية حيث المعاملات هي كل التوافيق(الحالات) الممكنة لعاملين أو اكثر.

وهذا يقودنا إلى صعوبات كثيرة منها عدم توفر أمكنة كافية متجانسة من أدوات التجربة لكل هذه الحالات . ونلجأ عندها لاستعمال التصميم العشوائي الناقص والتي تسمح باستقصاء الفروق بين n من المعاملات مرتبة ب من المجموعات في كل منها k من الوحدات حيث k<n

وتصمم التجربة بشكل مجموعات عشوائية مفيد جدا في التقليل من خطأ التجربة لان يستبعد واحدا من مصادر التفاوت.

وهناك طريقة أخرى للتصميم لضبط نوعين من أنواع التفاوت وفي نفس الوقت يقلل من عدد تكرارات المعاملات ويسمى بالمربع اللاتينيLatin square

مثال(8-9): 4 أنواع قمح مع أربع أنواع أسمدة مأخوذة خلال 4 سنوات مجموع الحالات الممكنة لاعادة التجربة هي4×4×4=64

ولكن مع اختبار نفس العدد من المجموعات للثلاثة عوامل المستعملة يستطيع اختبار يصمم المربع اللاتيني ونجري عليه التحليل باستعمال 16 معاملة فقط

الأعمدة				السطور
4	3	2	1	
A	B	D	C	1
C	B	A	D	2
D	A	D	C	3
A	D	C	B	4

جدول(17-9)

A B C D : أنواع القمح الأربعة

السطور: 4 أنواع الأسمدة

الأعمدة: 4 سنوات

كل معاملة تطبق مرة واحدة في كل سطر وفي كل عمود وعلى هذا علينا أن نفصل التفاوت الناتج عن أنواع الأسمدة المختلفة بالنسبة للأربعة سنوات لأربعة أنواع من القمح.لأي باحث أن يصمم تجربة مناسبة تقود إلى نتائج مقبولة

تمارين عامة على تحليل التباين

س1 : ثلاثة شعب في مادة مبادئ الرياضيات التي تعطي من قبل 3 مدرسين كانت النتائج النهائية كما يلي :

الدرجات

A	B	C
73	88	68
89	78	79
82	48	56
43	91	91
80	51	71
73	85	71
66	74	87
60	77	41
45	31	59
93	78	68
36	62	63
77	62	79
	96	53
	80	15
	56	

(1) هل يوجد فرق جوهري بين متوسطات العلامات المعطاة من قبل الـ 3 مدرسين على اعتبار أن

(2) اختبر تماثل التباين المجتمعات الثلاثة.

س2 : في مصنع للمواد اللاصقة بالمطاط يوجد 6 آلات لإنتاج هذه المادة نريد مقارنة هذه الآلات بالنسبة لضرورة المادة على الالتصاق، ولهذا الغرض أخذت عينة مكونة من 4 زجاجات من إنتاج كل آلة. وشوهد قدره المادة على الالتصاق بوحدات باوند/انش 10^{-2} × 2 وها هي المشاهدات

1	2	3	4	5	6
18.3	17.5	14.6	20.3	16.4	17.5
16.2	19.2	16.7	17.8	19.22	16.9
17.5	16.5	20.8	17.8	17.7	15.8
20.1	20.5	18.9	18.9	15.4	18.6

طبق تحليل التباين بمستوى معنوي $\alpha = 0.05$ وبين ما إذا كانت متوسطات المعاملات تختلف جوهريا.

س3 : استعملت أربعة أنظمة اختراق لـ ثلاثة أنواع صواريخ وقيست الاختراق كما في الجدول التالي :

طريقة الاختراق / أنواع الصواريخ	a_1	a_2	a_3	a_4
A	34.0 32.7	30.1 32.8	29.8 26.7	29.0 28.9
B	33.0 33.2	30.2 29.8	28.7 28.1	27.6 27.8
C	58.4 29.3	27.3 28.9	29.7 27.3	28.8 27.3

والمطلوب:

1) هل يوجد فروق هامة بين متوسطات الاختراق الأنظمة الصواريخ المختلفة.

2) هل يوجد تفاعل بين نظام الصاروخ ونظام الاختراق.

س4 : من ثلاث مختبرات متخصصة في التحليل الكيميائي أخذت عينات من المواد المرسلة لهذه المختبرات فإذا كانت هذه المختبرات تعطي نفس النتيجة في التحليل وكانت النتائج كما يلي :

A	B	C	D
58.7	62.7	55.9	60.7
61.4	64.5	56.1	60.3
60.9	63.1	57.3	60.9
59.1	59.2	55.2	61.4
58.2	60.3	58.1	62.3

a- استعمل اختبار بارتليت لتحديد ما إذا كان التباين بين المجتمعات تختلف جوهريا بمستوى معنوي 0.05.

b- إذا قبلت الفرضية في أ طبق طريقة تحليل التباين وعلق على نتائج التحليل في المختبرات الثلاثة.

س4 : فيما يلي نتائج خمس طلاب لـ 4 امتحانات في الرياضيات، الانجليزي، الفرنسي، والأحياء.

الامتحان / الطلبة	الأحياء		الفرنسي		الانجليزي		الرياضيات	
1	81 76	87 92	81 77	73 77	58 65	51 72	63 80	88 79
2	93 67	80 62	36 68	82 80	95 88	85 67	96 68	79 56
3	79 73	77 84	95 92	91 59	47 82	74 59	66 89	67 51

4	49	55	52	43	49	76	60	35
	56	53	32	42	76	26	70	64
5	76	83	81	95	94	85	77	99
	80	87	96	98	76	83	95	87

المطلوب :

1) هل الامتحانات هي نفس المستوى من حيث الصعوبة.
2) هل الطلبة هم في نفس المستوى من القابلية.
3) هل هناك من الطلبة ما يتفاعل مع بعض المواد بشكل مختلف عن الأخرى.

س5 : إذا كان لدينا شركة تنتج نوعين من أفران المطبخ الكهربائي ولها ثلاثة سياسات في التسويق والدعاية، وتبيع هذه السلع في السوق (المبيعات الشهرية = س) حجم تجربة تقود لتحليل التباين.

والمطلوب :

1) ما هو التباين الكلي للمبيعات : اكتب الصيغة الرياضية.
2) ما هو نوع الصنف في هذه التجربة.
3) صياغة الفرضيات التي تقود لمعرفة التأثيرات المختلفة في التجربة السابقة.

س6 : أثبت أن

a) ما هو نوع التصنيف في هذه المعادلة.
b) ما هو عدد درجات الحرية لكل من مكونات التفاوت.

الفصل العاشر

تطبيقات الحاسوب

10-1 مقدمة Introduction

يلعب علم الإحصاء دورا هاما في المجالات شتى من مناحي الحياة كما المجالات الاقتصادية والتربوية والاجتماعية وقد عمل الباحثون في هذه المجالات وعانوا ما عانوا من الجهد الكبير وخاصة عند إجراء التقييم الإحصائي للبحث ونظرا لصعوبة العمليات الحسابية كانت تجبر الباحثين عل أخذ عيناتهم بأحجام صغيرة قد لا تفي بالغرض المطلوب. وأحيانا قد لا تؤدي إلى المطلوب إلا أنهم كانوا يقبلون بالنتائج كما هي بالرغم من عدم دقتها. إلا أنه ومع تقدم علم الحاسوب أصبح بإمكان الباحثين أخذ حجم العين التي يريدون تحقق أهدافهم المرجوة ولمساعدتهم على ذلك ولكي يتمكنوا هم والمهتمين في هذا المجال من الاستفادة من الحاسبات الإلكترونية تقدم برنامجا جاهزا يستعينون به يطلق عليهSPSS من خلال النوافذWindows.

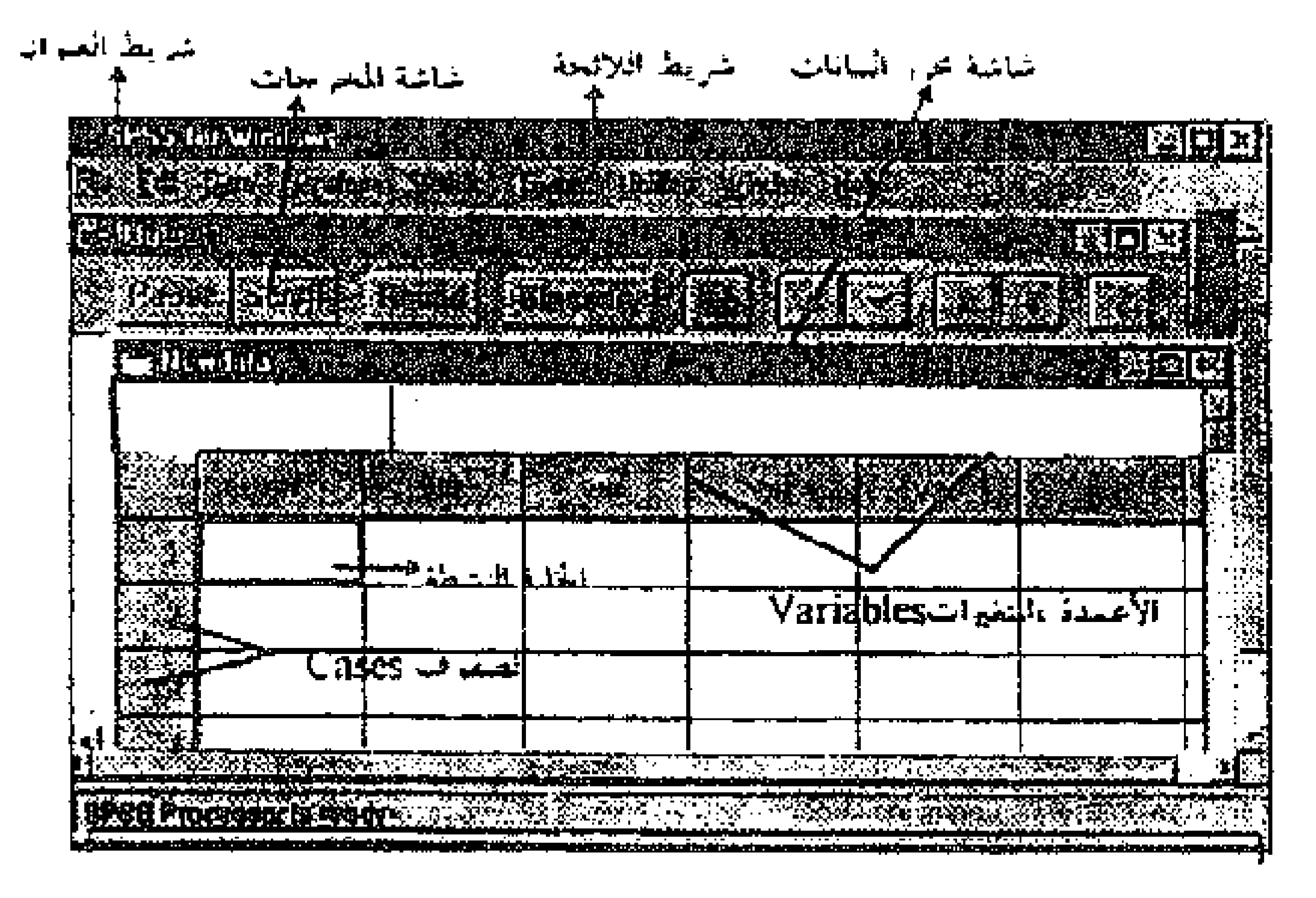
10-2 تشغيل البرنامجSPSS

عند تشغيل نوافذ Windows لا بد من اتباع الخطوات التالية:

1) ننقر على الكلمة Start الموجودة في أسفل الشاشة على شريط المهمة Task Bar.

2) ننقر على الكلمة برامج Programs من قائمة البدء.

3) ننقر نقرا مزدوجا فوق الكلمة من القائمة الفرعية في أمر البرنامج Programs فتظهر ثلاثة نوافذ هي على التوالي نافذةSPSS ، نافذة المخرجات، ونافذة محرر البيانات كما في الشكل(1-10)



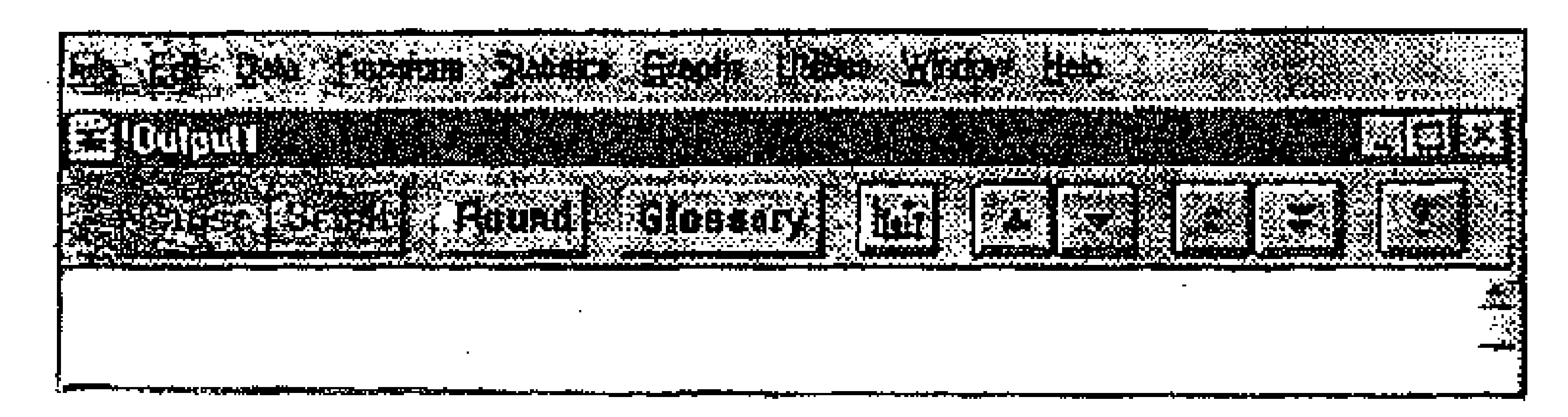
شكل (10-1) نافذة المخرجات ونافذة محرر البيانات في SPSS

10-3 شاشات SPSS

يستخدم SPSS عدة أنواع من النوافذ أهمها :

1- شاشة محرر البيانات Data Editor window : تشبه هذه الشاشة شاشة الجدول الإلكترونية Spreadsheets (Excel) انظر الشكل (10-1) من خلال هذه الشاشة تستطيع إنشاء وتحرير ملفات البيانات وتنتهي أسماء ملفات بيانات Spss بالملحق SAV هذا ويمكنك قراءة ملفات SPSS من خلال تطبيقات أخرى مثل Excel .

2- نافذة المخرجات Output Window : وهي النافذة التي تفتح بشكل تلقائي عند استدعاء تطبيق SPSS وفيها يتم تخزين ناتج العمليات الإحصائية وتنتهي أسماء الملفات التابعة لهذه الشاشة بالملحق LST ويمكنك إجراء التعديلات على محتويات هذه النافذة وإذا رغبت في فتح اكثر من نافذة مخرجات فيمكنك إنشاء نوافذ جديدة باختيار الأمر جديد New من قائمة ملف File ثم النقر فوق SPSS Output انظر الشكل (10-2)



الشكل (10-2) نافذة المخرجات

وهذه أهم الأيقونات الموجودة في شاشة المخرجات (الشكل (10-2) :

أيقونة Pause تستخدم لإيقاف عملية سرد المخرجات (النتائج) .

أيقونة Scroll تستخدم لمتابعة سرد النتائج على الشاشة .

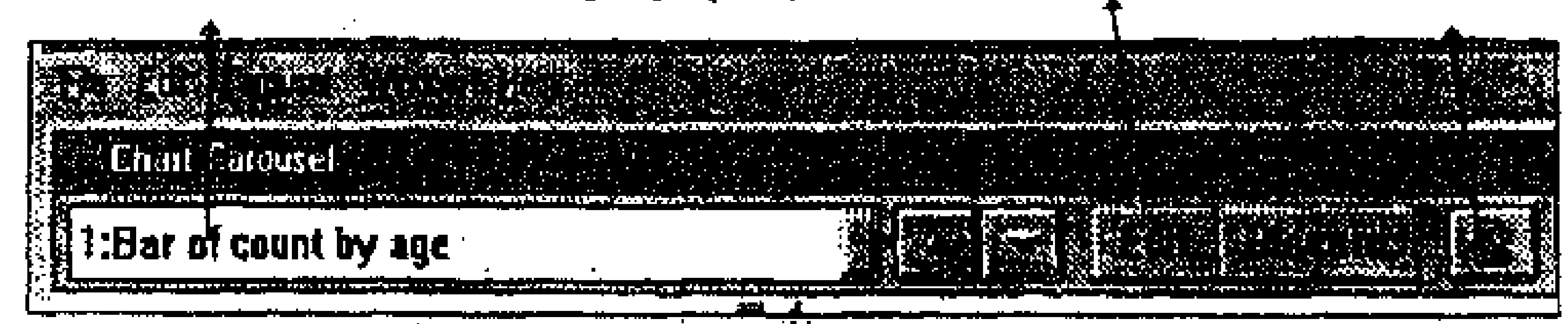
أيقونة Round تستخدم لتقريب المنازل العشرية (أو حسب الرقم الذي حدد في مربع حوار Round من قائمة Edit).

أيقونة Glossary تستخدم لإيجاد مسرد بالكلمات العسيرة مع شرح لها .

أيقونة Chart Button تستخدم لإيجاد High-Resolution وربطها مع محرر الرسم البياني Chart Carousel .

3- شاشة نوافذ التخطيط Chart Carousel : وهي الشاشة التي تمكنك من تخزين ومعاينة الرسومات البيانية التي أنشئت باستخدام تطبيق SPSS انظر الشكل (10-3)

تنشيط نافذة المخرجات　　الانتقال إلى نافذة محرر الرسم البياني من اجل تحريرها　　نوع الرسم البياني



الشكل (10-3) نافذة Chart Carousel

4- شاشة الرسم البياني Chart window : يمكنك في هذه الشاشة أن تخزن وتعدل الرسم البياني الذي أنشأته بواسطة تطبيق SPSS فيمكنك تغير الألوان

وعناوين المحاور وإضافة وسيلة إيضاح وحتى تغير نوع الرسم البياني (مثلا من أعمدة إلى دائري) .

لاحظ انه يجب حفظ كل شاشة بعد الانتهاء من العمل بها .

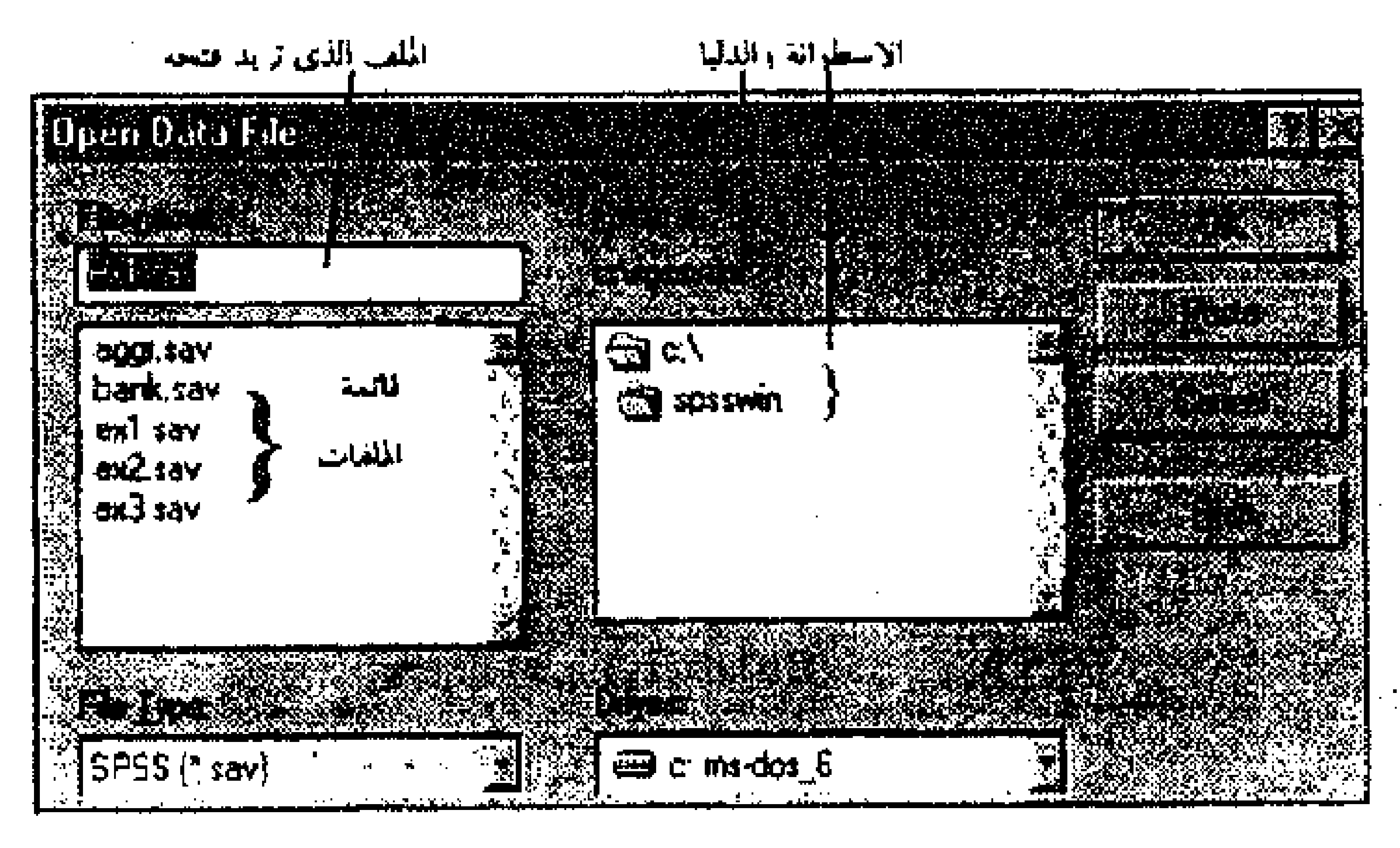
10-4 فتح ملف بيانات مخزن open.

يمكنك فتح ملف بيانات قد عملت به مسبقا لإجراء التعديلات علية أو الإطلاع علية أو لإجراء عمليات إحصائية جديدة وذلك بإتباع الخطوات التالية :

1- اختر الأمر ملف File من شريط اللائحة وانقر فوق أمر فتح Open من القائمة الفرعية انقر فوق Data .

2- من مربع الحوار Open Data File حدد الملف الذي تريد فتحة من قائمة الملفات فيظهر ذلك في مربع File name ثم اختر الأمر OK كما هو موضع في الشكل (10-4)

لاحظ انك تستطيع فتح ملفات التخطيط بالنقر فوق Chart أو بالنقر على Output لفتح ملفات المخرجات وذلك بدلا من النقر فوق Data .



الشكل (10-4) مربع حوار فتح ملف بيانات مخزن

10-5 إدخال البيانات Entering Data .

يمكنك إدخال في شاشة محرر البيانات New Data وذلك بإتباع ما يلي :

1- اختر الخلية الاولى (رقم 1) فتظهر حدود خارجية حول الخلية إشارة إلى أن هذه هي الخلية نشطة حيث يظهر اسم المتغير ورقم الزاوية اليسرى العليا من نافذة محرر البيانات كما في الشكل (5-10)

2- ادخل القيمة ثم اضغط مفتاح الإدخال Enter.

اسم المتغير ورقم الصف

القيمة المراد إدخالها في الخلية

Newdata	
1:name	1

	1.00			

الشكل (5-7) إدخال البيانات في نافذة محرر البيانات

10-6 إدراج متغير (عمود) Insert variable .

يمكنك إضافة عمود في الموقع الذي تحدده وذلك بإتباع الخطوات التالية :

1- ضع مؤشر الفارة على العمود الذي تريد إضافة عمود جديد قبلة .

2- من قائمة بيانات اختر الأمر Insert variable فيظهر عمود فارغ يحتوي على اسم يعطيه SPSS مثل VAR 0001 يمكنك تغييره كما ستتعلم لاحقا .

10-7 إدراج صف (حالة) Insert Case .

لإضافة صف جديد إلى جدول البيانات اتبع ما يلي :

1- ضع مؤشر الفارة على الصف الذي تريد إضافة صف جديد فوقه .

2- من قائمة بيانات Data اختر الأمر Insert Case فيظهر صف فارغ يحتوي على رقم إلى جانبه .

10-8 تغيير اسم المتغير Rename Variable Name.

يعطي تطبيق SPSS وبشكل تلقائي اسماً للمتغير (العمود) ولكن يمكنك تغير هذا الاسم وإعطاؤه الاسم المناسب الذي تريد وذلك بإتباع ما يلي :

1- اختر أية خلية في ذلك العمود .

2- اختر الأمر Define variable من قائمة البيانات Data menu أو بالنقر المزدوج على اسم المتغير في عنوان العمود فيظهر مربع حوار Define variable كما الشكل (10-6) كذلك يمكنك اختيار الأمر Define Variables عندما تكون شاشة محرر البيانات نشطة ومنها يمكنك تعريف متغيرات جديدة أو تغير التنسيق للمتغيرات الموجودة من قبل .

Define Variable
Variable Name: VAR00001
Variable Description
Type: Numeric8.2
Variable Label:
Missing Values: None
Alignment: Right
Change Settings

الشكل (10-6) مربع الحوار Define Variables

3- اكتب اسم المتغير في مربع variable name لاحظ أن SPSS يعطيك اسماً تلقائياً مثل VAR00001 كما هو موضح في الشكل (10-7) وعليك هنا أن تتجنب التسمية بنفس الاسم أو فيه مثل (VAR002) كذلك عليك أن تتجنب محاولة تغيير نوع هذه الأسماء كما عليك أن تتجنب إعطاء أسماء تبدأ بإشارة $ (مثل) كذلك الأسماء التي تنتهي ب (_) (مثل _MONTH أو FILTER_$) .

10-8-1 تغيير النوع أو التنسيق الحالي Variables Type .

يمكنك التحكم بشكل أسماء المتغيرات وتنسيق البيانات المدخلة إلى شاشة محرر البيانات مثل تحديد عدد الفواصل العشرية أو إضافة إشارة الدولار $ للعملة وذلك بإتباع الخطوات التالية :

1- انقر فوق الخيار Type من مربع حوار Define Variables فيظهر مربع حوار Type كما في الشكل (10-7)

2- اختر الخيار الذي تريد لتحديد نوع المتغير المطلوب حيث يوفر SPSS خيارات متعددة للمتغيرات مثل رقمي Numeric فاصلة عشرية Comma وذلك لاستخدام الفاصلة العشرية مع القيم الرقمية والنقطة Dot والتاريخ Data وإشارة الدولار Dollar .

Define Variable Type:		
Numeric		Continue
Comma	Width: 8	Cancel
Dot	Decimal Places: 2	Help
Scientific notation		
Date		
Dollar		
Custom currency		
String		

الشكل (10-7): مربع حوار Define Variable Type

ويستخدم مربع العرض Width لتحديد عدد الخانات كما يستخدم مربع الخانات العشرية Decimal Places للتحكم في عدد المنازل إلى يمين الفاصلة أو النقطة .

10-8-2 تحديد عنوان المتغير Variable Label .

يمكنك إعطاء قيم لعناوين المتغيرات Variable Label وبالتالي استخدام هذه

القيم عند إدخال البيانات بدلا من طباعة العناوين فمثلا إذا أردت أن يشير الرقم 1 إلى Clerical والرقم 2 إلى Office Trainee والرقم 3 إلى Security Officer عليك باتباع الخطوات التالية :

1- من مربع الحوار Define Variables تستطيع تحديد عنوان المتغير وذلك بالنقر فوق variable label فيظهر مربع حوار Define Labels كما في الشكل (10-8).

2- ادخل القيم لعناوين المتغيرات كما هو موضح في الشكل (10-8) في مربع value فمثلا رقم 1،2،3 .

Variable Label: Employment category
Value Labels
Value:
Value Label:
Add
Change
1 = "Clerical"
2 = "Office trainee"
3 = "Security officer"

الشكل (10-8) مربع حوار Define Labels

3- في مربع value label اكتب العنوان الذي تريد مثلا Clerical .

4- اختر add لتثبيت القيمة كما يمكنك إزالة remove أو تغيير العنوان change بالنقر على الزر المناسب بعد تحديد العنوان الذي تريد إزالته أو تغييره .

5- والآن يمكنك إضافة الأرقام حسب تصنيفك لها بدلا من الكتابة الحرفية فمثلاً الرقم 1 يشير إلى Clerical وبذلك يفهم الرقم حسب تصنيفك اعلاه كما في الشكل(10-9)

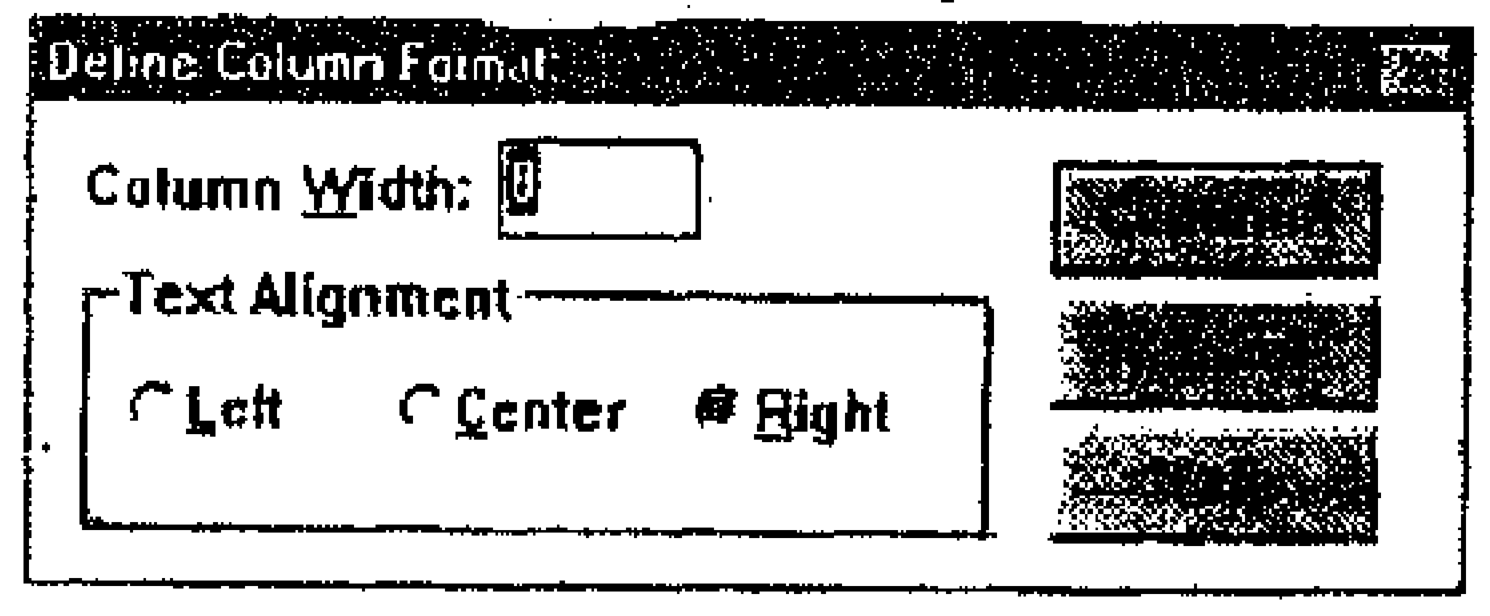
5:minority	0			
	jobcat	minority	sexrace	
1	4	0	1	
2	5	0	1	
3	1	0	1	
4	2	0	1	
5	3	0	1	

الشكل (10-9) نافذة محرر البيانات بعد إدخال البيانات إليها

10-8-3 تنسيق الأعمدة Column format.

لتغير شكل القيم في شاشة محرر البيانات (عرض العمود محاذاة النص) اتبع ما يلي:

1- أنقر فوق column format من مربع حوار Define Variables فيظهر مربع حوار column format كما في الشكل (10-10)



الشكل (10-10) مربع حوار تنسيق العمود

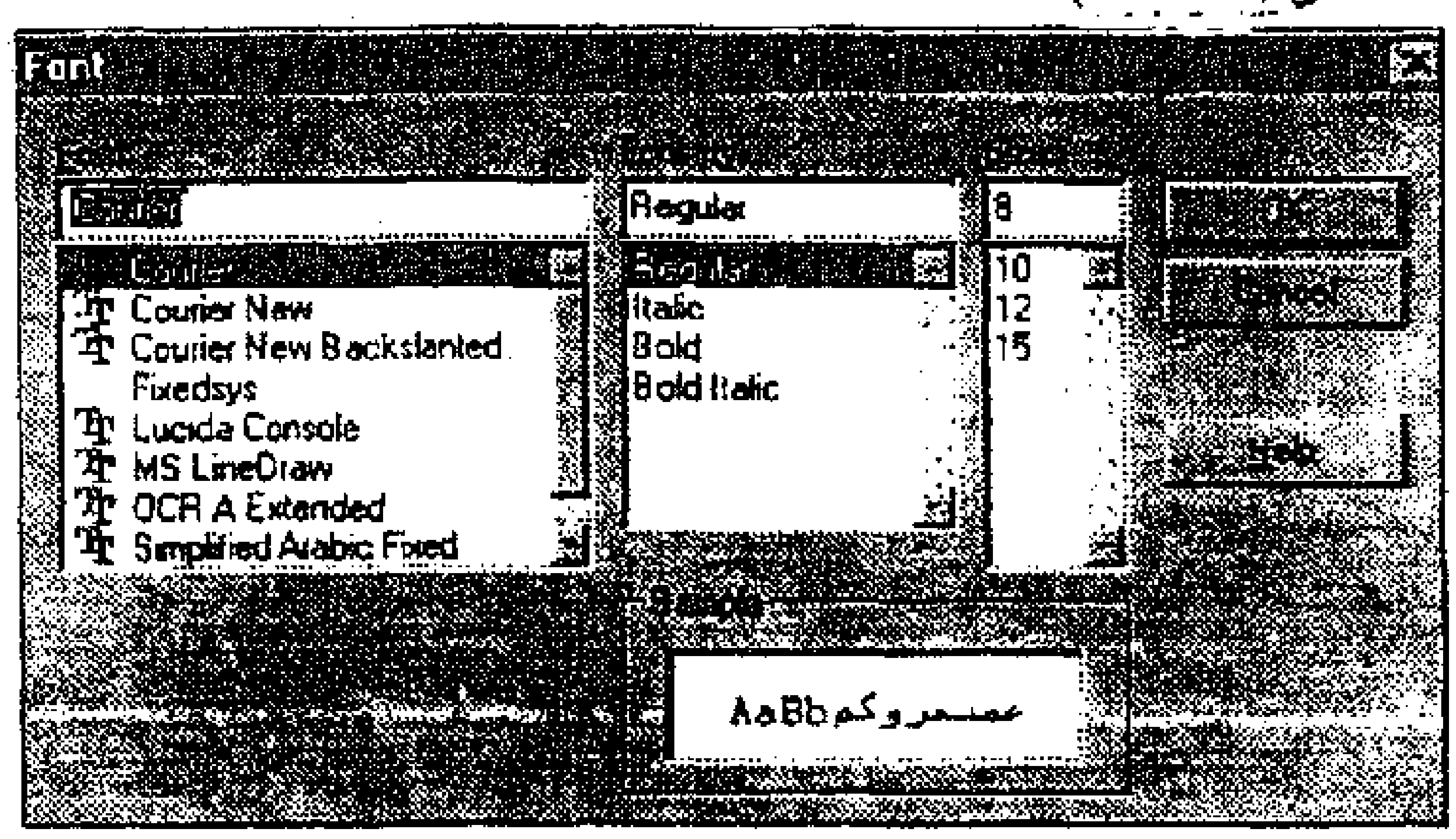
2- يمكنك زيادة أو إنقاص عرض الأعمدة بتحديد العرض الذي تريد في مربع column width .

3- كما يمكنك تحديد محاذاة النص إلى اليمين Right أو إلى اليسار Left أو في الوسط Center وذلك بالنقر على الخيار الذي تريد انظر الشكل(10-7) الخيار الذي تريد أنظر الشكل (10-11)

10-9 تغيير نمط البيانات Fonts

يمكنك تغيير نوع الخط للبيانات سواء كـان في شاشـة محـرر البيانـات أو في شاشة المخرجات وذلك بتحديد البيانات المراد تغير خطها Fonts وذلك اما بواسطة الفارة أو باختيار الأمر Select من قائمة Edit .

1- أنقر فوق الأمر Fonts من قائمة Utilities فيظـهر مربـع حـوار Fonts كمـا في الشكل (10-11)



الشكل (10-11) مربع حوار Fonts

2- حدد نمط الخط الذي تريد غامق Bold ، أو مائل Italic ، أو عادي Regular ، أو غامق مائل Bold italic وذلك من مربع Font Style

3- حدد الحجم الخط وذلك من مربع Font Size

4- أنقر موافق OK .

10-10 حذف المتغير (العمود) Delete Variable

لحذف عمود أو أكثر بما يحتويه من بيانـات ، حـدد Select عنـوان العمـود بالنقر على اسم المتغير في أعلى العمود واحذفها اما بالنقر فـوق Clear مـن قائمـة تحرير Edit أو بالضغط على Delete من لوحة المفاتيح .

10-11 حذف الحالة (صف) Delete Case.

لحذف صف أو أكثر بما يحتويه من بيانات ، حدد الصف Select Row وذلك بالنقر على رقم الصف في الجانب الأيسر من الصف اضغط Delete في لوحة المفاتيح أو اختر Clear من قائمة Edit .

10-12 نقل أو نسخ خلية إلى خلية أخرى Move Or Copy.

يمكنك نسخ بيانات متغير أو حالة إلى مكان جديد وبالتالي الحصول على نسختين متطابقتين من البيانات أو نقل بيانات خلية إلى موقع آخر وذلك باتباع الخطوات الآتية :

1- حدد المتغير (العمود) أو الحالة (الصف) التي تريد قصها أو نسخها .

2- اختر الأمر Cut للنقل أو Copy للنسخ من قائمة Edit .

3- انتقل إلى الخلية التي تريد نقل أو نسخ البيانات أليها .

4- انقر فوق paste من قائمة Edit .

10-13 إنشاء ملف بيانات New Data File.

لا نشاء ملف بيانات جديد انقر فوق Data من القائمة الفرعية للأمر New من قائمة ملف File .

10-14 حفظ البيانات Saving Data.

لحفظ البيانات اختر الأمر Save من قائمة ملف File ولابد أن تكون شاشة محرر البيانات نشطة لحفظها .

10-15 الانتقال إلى مكان معين في شاشة محرر البيانات Go To .

إذا رغبت في الانتقال إلى صف معين في ملفك في شاشة محرر البيانات اتبع ما يلي :

1- أنقر فوق الأمر Go To من قائمة Data فيظهر مربع الحوار Go To case كما في الشكل (10-12)

2- في مربع Case Number أكتب رقم السطر الذي ترغب في الانتقل أليه.

Go to Case
Case Number: 48
OK Close Help

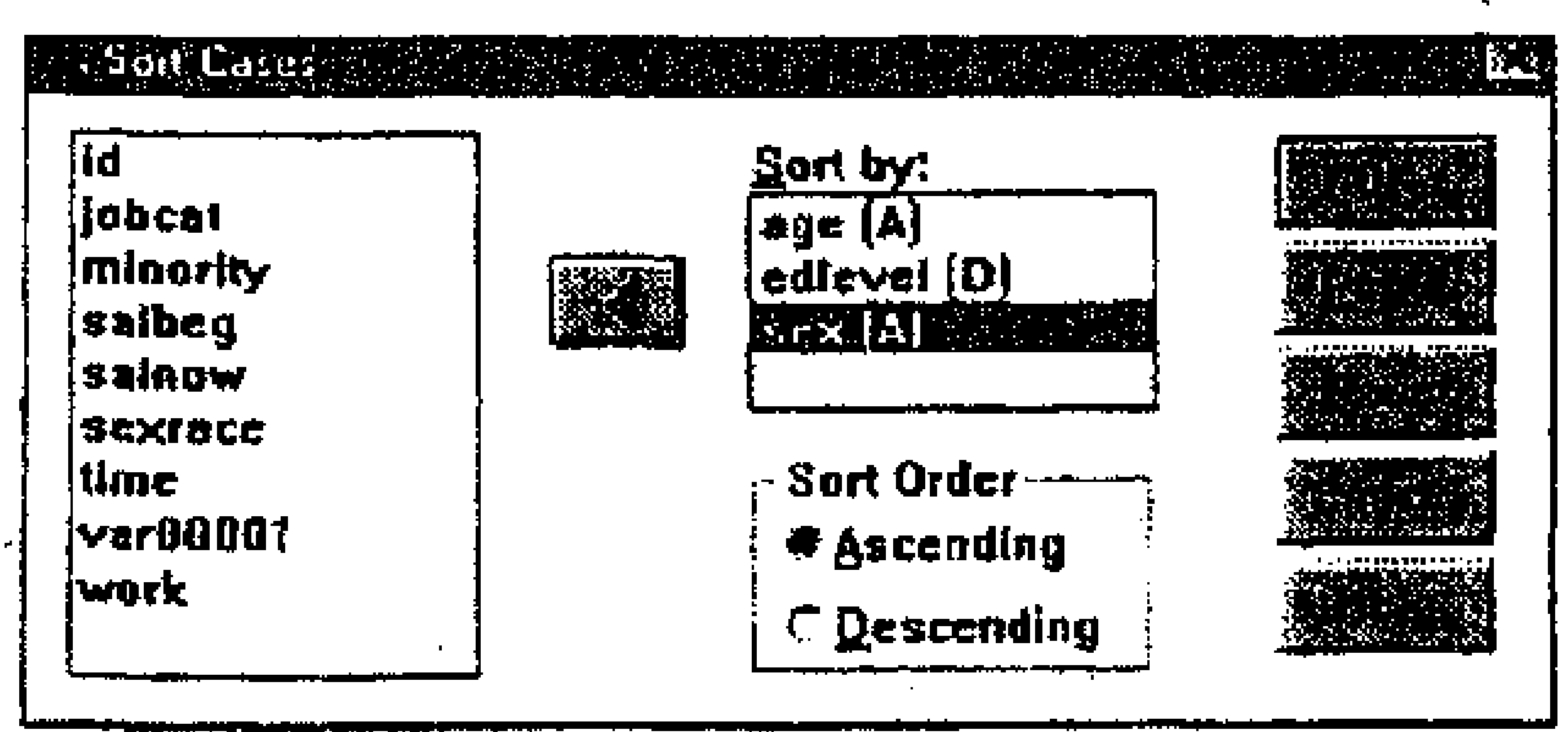
الشكل (10-12) مربع حوار Go to Case

3- أختر موافق OK .

10-16 فرز بيانات الصفوف Sort cases .

يمكنك فرز البيانات المدخلة في الحالة (الصف) وذلك بأتباع الخطوات الآتية:

1- أنقر فوق Sort Case مـــن قائمة Data فيظـهر مـربـع حـوار كما في الشـكل (10-13).



الشكل (10-13) مربع حوار Sort Cases

2- اختر المتغير الذي تريد التصنيف عليه . وانقر على السهم القريـب مـن مربع Sort By .

3- في مربع Sort order اختر Descending من أجل ترتيب تنـازلي (مـن الأكـبر إلى الأصغر) وللأرقام من Z-A ويشار إليها بالحرف (D) إلى جانب المتغير أما إذا اخترت Ascending الذي يشار إليـها بـالحرف (A) إلى جـانب المتغـير فـإن الترتيب يكون تصاعدياً (من الأصغر للأكبر) .

4- كما يمكنك إجراء الفرز على أساس عدة متغيرات وذلك باختبار المتغير وتحديد نوع الترتيب الذي تريده لذلك المتغير .

5- اختر موافق OK .

تمرين (10-1)

لديك سلعتين سلعة (X) وسلعة (Y) ادخل البيانات التالية لكل من السلعتين .

X	Y
3	2
7	3
-7	-1
2	0
2	1

1- أجعل البيانات في الوسط ولا تحتوي على منازل عشرية ونمط الخط غامق .

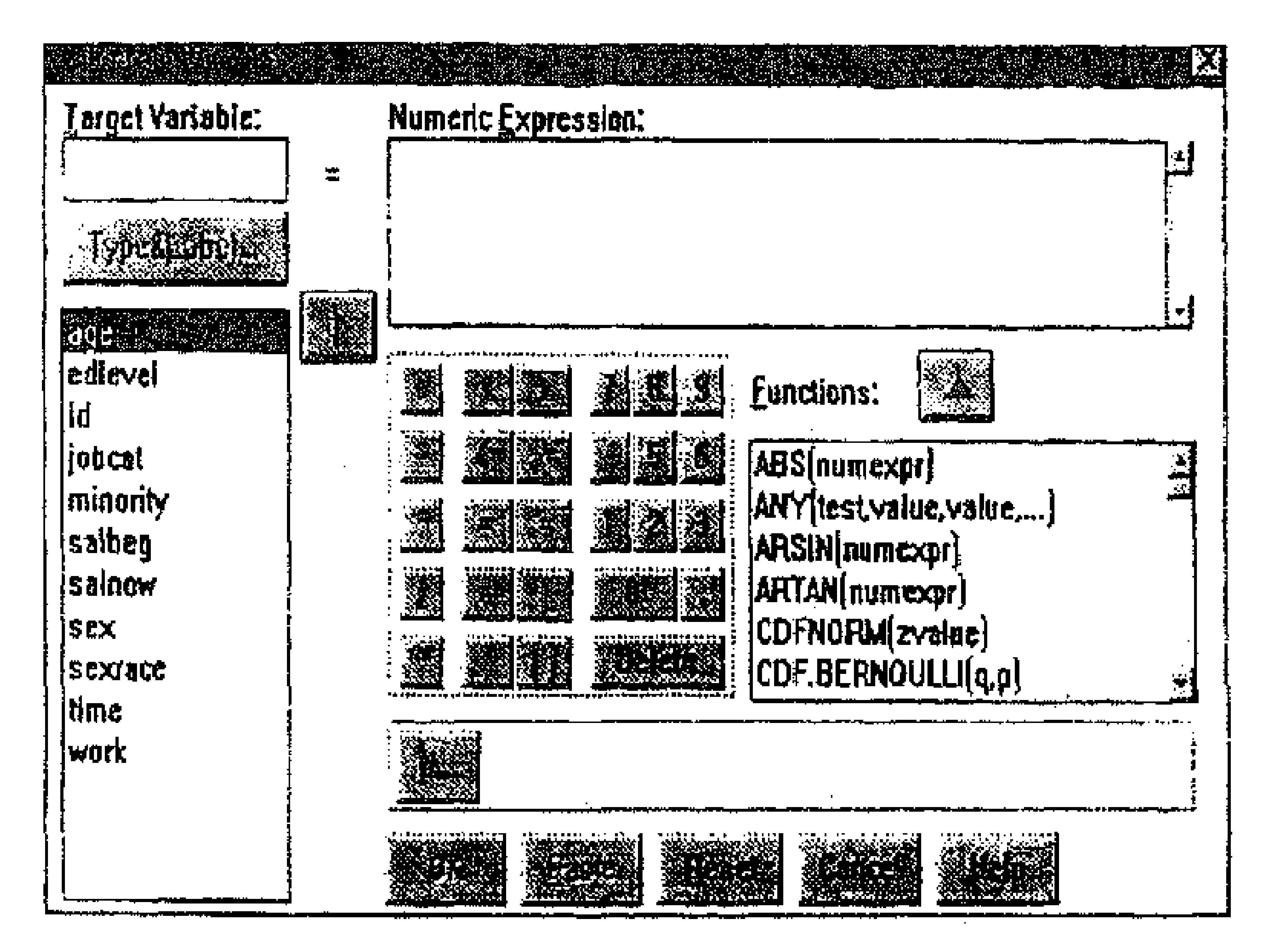
2- ادرج عمود جديد Z .

3- انسخ بيانات العمود X إلى العمود Z .

4- خزن الملف باسم Exe-1 .

10-17 العمليات الحسابية Compute .

تستطيع باستخدام SPSS تعريف متغيرات جديدة وحساب قيمها من خلال القيم المخزنة وبالنقر فوق الأمر Compute من قائمة Transform يظهر مربع حوار Compute كما في الشكل (10-14)



الشكل (10-14) فيظهر مربع الحوار Compute

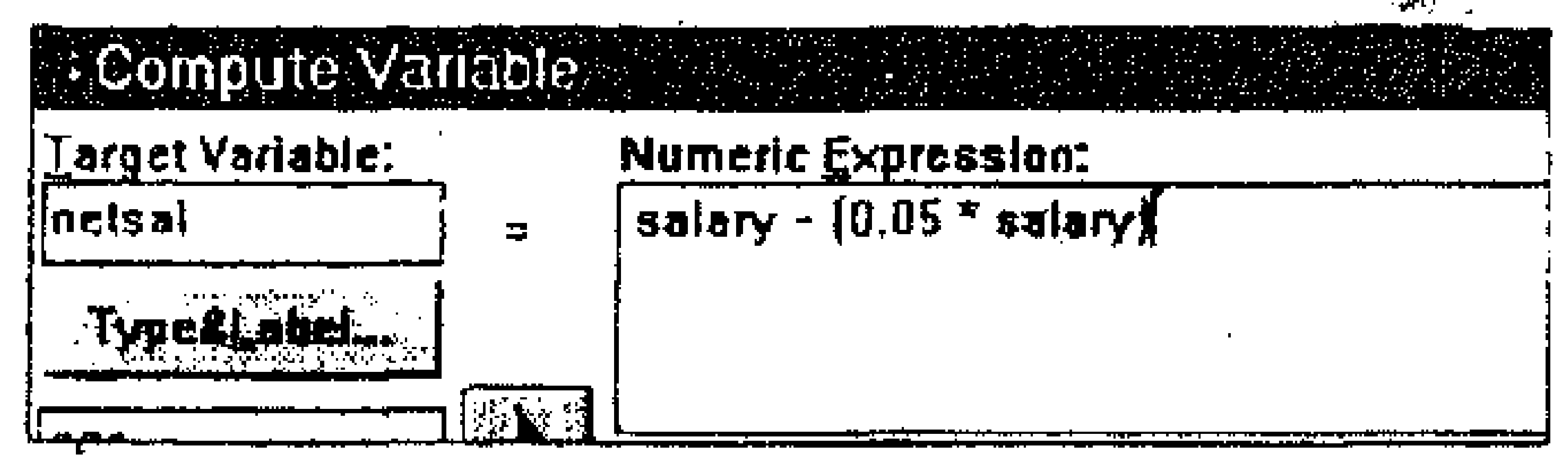
أطبع اسم المتغير الجديد في مربع Target Variable ثم انتقل إلى المربع Numeric Expression لإدخال معادلة حساب المتغير الجديد وتستطيع كتابة هذه المعادلات أما عن طريق لوحة المفاتيح أو باستخدام الآلة الحاسبة Calculator الموجودة على نفس الشاشة كذلك باستطاعتك استخدام الدوال الرياضية Functions أو استخدام العلاقات المنطقية من خلال جملة IF المثال التالي يوضح كيفية استخدام أمر Compute .

افترض انك أدخلت بيانات تخص موظفي إحدى الشركات وخزنة كما في الشكل (10-15)

	id	hoursw	age	salary	var
1	628	30	29	200	
2	630	60	40	320	
3	632	45	31	300	
4	633	55	36	400	
5	635	60	42	350	

الشكل (10-15) بيانات الموظفين

هذه البيانات عبارة عن رقم الموظف ID وعدد ساعات العمل hoursw والعمر Age والراتب Salary فإذا أردنا أن نحسب صافي الراتب Netsal بعد اقتطاع الضريبة(5 في هذا المثال) فإننا ننقر على Compute من قائمة Transform ثم ندخل اسم المتغير Netsal في مربع Target Variable ونكتب معادلة حساب صافي الراتب في مربع Numeric Expression كما في الشكل (10-16) ونختار OK.



شكل (10-16) معادلة حساب صافي الراتب

نتيجة لذلك نجد أن عمودا جديداً بأسم Netsal قد ظهر ويحتوي على صافي الراتب لكل موظف كما في الشكل (10-17)

	id	hoursw	age	salary	netsal	var
3	632	45	31	300	285.00	
4	633	55	36	400	380.00	
5	635	60	42	350	332.50	
6	637	40	30	200	190.00	

شكل (10-17) ناتج عملية خصم الضريبة

كذلك فانك تستطيع استخدام العلاقات المنطقية أو شرط If إذا أردت تخصص عملية معينة على بعض الحالات. فمثلا، إذا أردت زيادة رواتب الموظفين الذين تزيد أعمارهم على 35 سنة بمقدار 2٪ في متغير جديد اسمه add2، فعليك إتباع الخطوات التالية :

1- أنقر على مربع If لتنتقل إلى شاشة If شكل (10-18) في مربع الحوار Compute Variableضع الشرط وهو age>35.

2- أنقر على Compute لتعود إلى الشاشة الأولى وتدخل اسم المتغير الجديد Add2 في مربعVariable Target وكذلك معادلة زيادة الراتب في المربع Numeric Expression وتختار OK كما هو في الشكل (10-19)

Compute Variable: If Cases

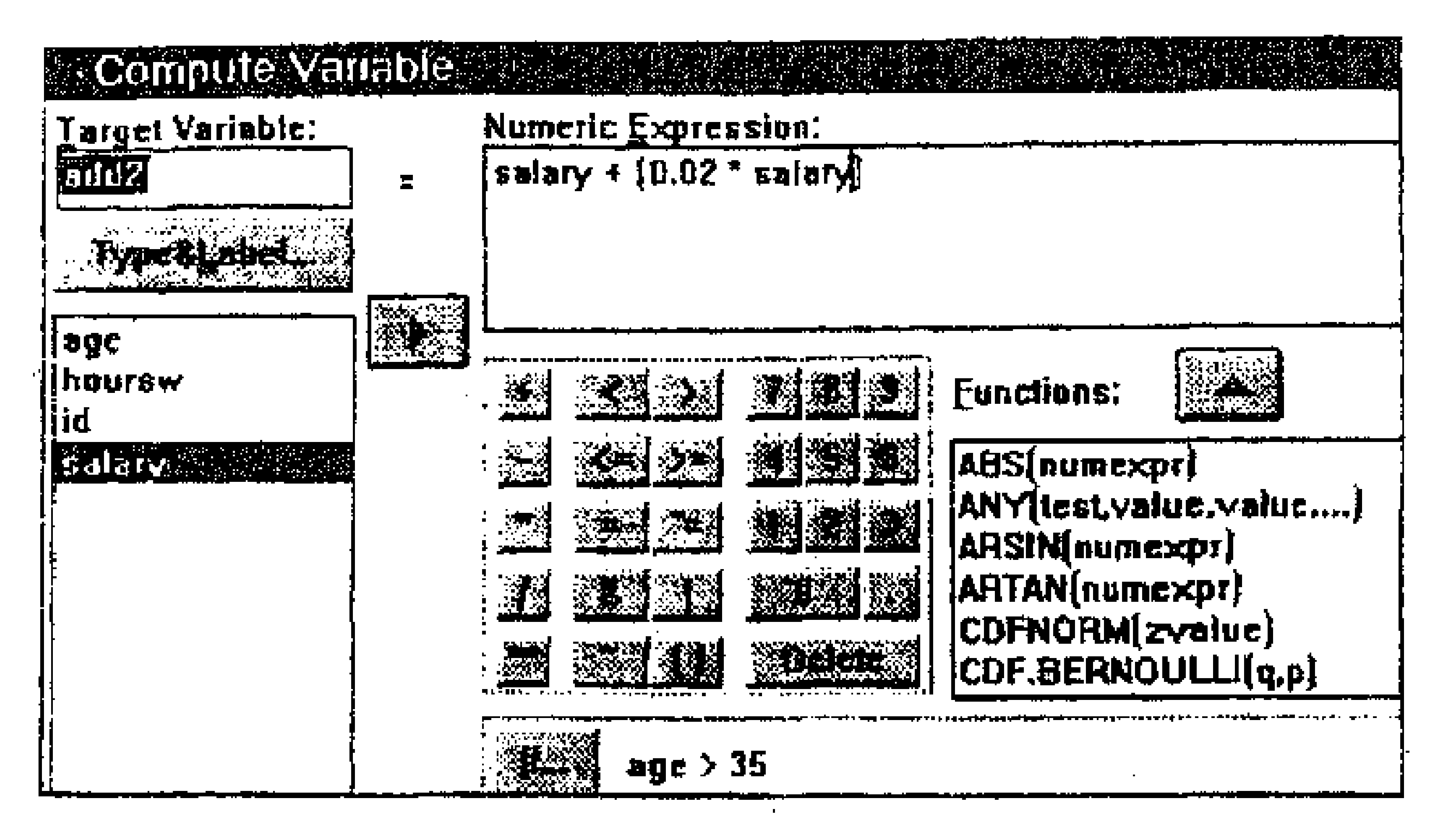
age
hoursw
id
salary

Include all cases
Include if case satisfies condition:
age > 35

Functions:
ABS(numexpr)
ANY(test,value,value,...
ARSIN(numexpr)
ARTAN(numexpr)
CDFNORM(zvalue)
CDF.BERNOULLI(q,p)

Continue Cancel Help

الشكل (10-18) شاشة IF



الشكل (10-19) كتابة معادلة إضافة الراتب

سوف تظهر شاشة محرر البيانات والتي تحتوي على العمود Adds كما في الشكل (10-20) لاحظ أن زيادة الراتب قد حدثت فقط للذين تجاوزت أعمارهم 35 سنة .

	id	hoursw	age	salary	adds	var
1	628	30	28	200		
2	630	60	40	320	326.40	
3	632	45	31	300		
4	633	55	36	400	408.00	
5	635	60	42	350	357.00	

الشكل (10-20) زيادة الرواتب للذين أعمارهم فوق 35 سنة

أما إذا كان Target Variable قيماً غير رقمية عندها يجب اختيار Type& Label لتحديد طول المتغير ومن متابعة الخطوات كما هو اعلاه .

10-18 الارتباط Correlation.

يبين الارتباط Correlation العلاقة بين . والارتباط يكون بسيطا Bivariate Correlation إذا كانت العلاقة بين متغيرين فقط ويكون جزئياً Partial Correlation في حالة وجود ارتباط بين اكثر من متغيرين . وتستخدم معاملات لقياس الارتباط تسمى معامل الارتباط تصف العلاقة بين المتغيرات ومدى قوة وضعف العلاقة بين هذه المتغيرات وتقع قيمة معامل الارتباط بين 1- و 1+ فإذا كان مقياس الارتباط يقيس العلاقة بين وقيمة معامل الارتباط تساوي صفراً فهذا يعني انه لا توجد أي علاقة بين المتغيرين وكلما قريب قيمة معامل الارتباط من 1+، كانت العلاقة بين المتغيرين قوية وكلما قربت من 1- كلما كانت العلاقة عكسية (أي إذا كان أحد المتغيرين يزداد فإن الثاني ينقص) وهنالك عدة معاملات للارتباط اشهرها معامل بيرسون ومعامل سبيرمان وباستطاعتنا استخدام هذه المعاملات مع تطبيقات SPSS .

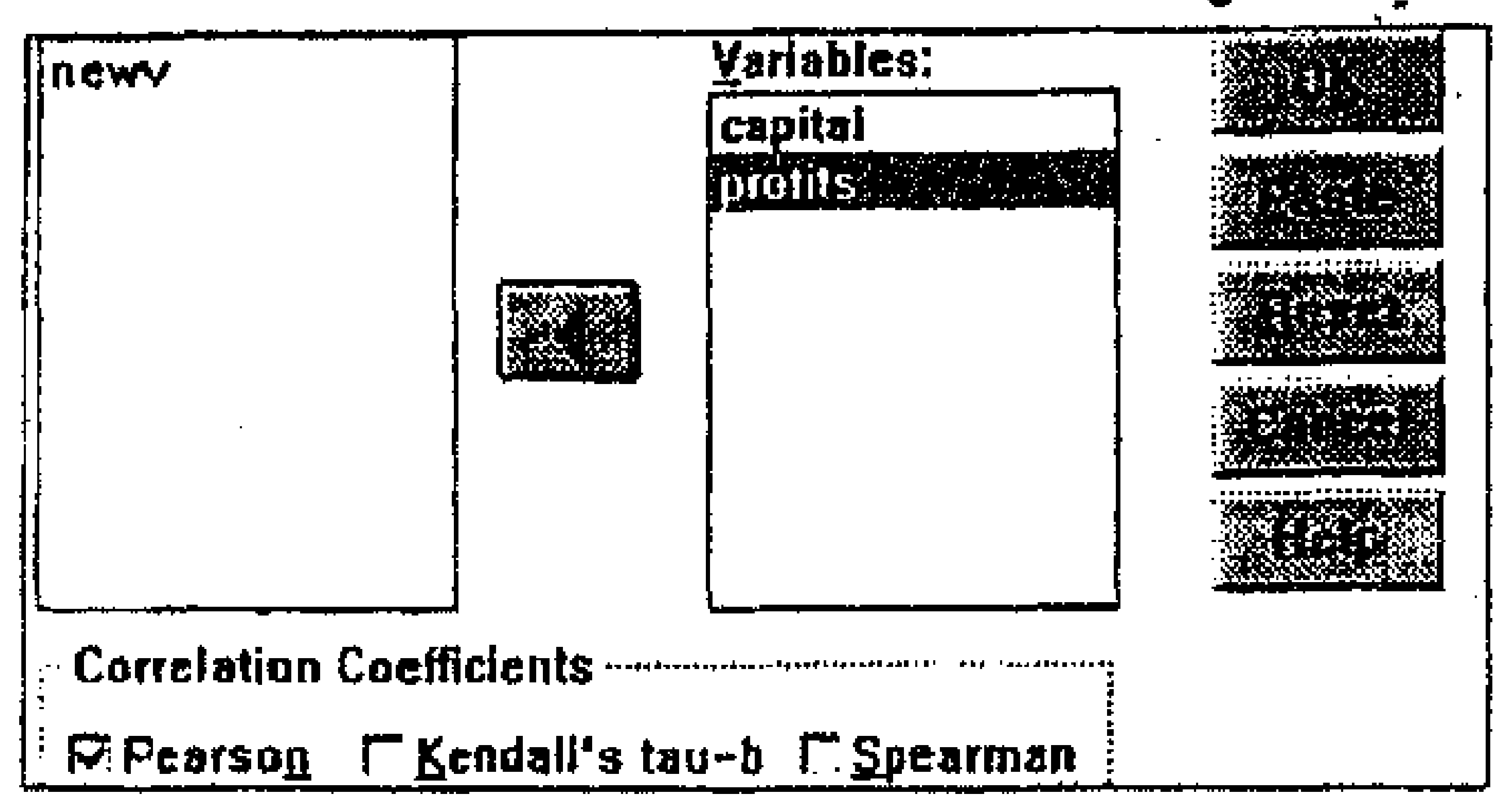
مثال : احسب معامل الارتباط بين راس المال Capital والأرباح Profits للبيانات الموجدة في الشكل (10-21)

[illegible]	[illegible]
10	1.2
15	2.0
5	.8
30	4.0
25	2.7
27	3.1
7	.9
18	2.2
45	5.8
38	4.3

الشكل (10-21) شاشة محرر البيانات

يستطيع حساب الارتباط بإتباع الخطوات التالية :

1- انقر فوق Correlate من قائمة Statistics ومنها اختر Bivirate التي تحسب معامل بيرسون ومعامل سيبرمان فيظهر مربع حوار Bivariate Correlation كما في الشكل (10-22)



الشكل (10-22) مربع حوار Bivariate Correlation

2- اختر على الأقل متغيرين (Capital و Profits في المثال) .

3- من مربع Correlation Coefficients يمكنك من اختيار نوع معامل الارتباط (في المثال تم اختبار معامل بيرسون Pearson) .

4- انقل المتغيرات Capital Profits إلى مربع Variables وذلك بالنقر فوقها لتظليلها ونقلها بالنقر على السهم .

5- اختر الأمر options لاختيار المزيد من العمليات الإحصائية (اخترنا في هذا المثال الوسط الحسابي Mean و الانحراف المعياري Standard Deviation).

6- ثم اختر Continue لتعود إلى الشاشة الأولى ومنها اختر OK سوف تجد النتيجة في شاشة المخرجات كما في الشكل (10-23)

```
SPSS for Windows - [!Output1]

Variable        Cases            Mean            Std Dev

CAPITAL           10          22.0000           13.3583
PROFITS           10           2.7000            1.6282

24 Jan 98 SPSS for MS WINDOWS Release 6.0

                      - -  Correlation Coefficients  -

                CAPITAL      PROFITS

CAPITAL          1.0000        .9885
                (   10)     (   10)
                P=          P= .000

PROFITS           .9885       1.0000
                (   10)     (   10)
                P= .000     P= .
```

الشكل (10-23) شاشة المخرجات لحساب معامل الارتباط

لاحظ من الشكل (10-23) أن علاقة بين المتغيرين قوية جداً وتساوي (0.9885) .

مثل (10-2)

احسب معامل الارتباط بين العمر Age ومرض ضغط الدم Blood Pressure وذلك بالاعتماد على الجدول التالي :

1- باستخدام معامل ارتباط بيرسون .

2- باستخدام معامل ارتباط سبيرمان .

3- احفظ هذا التمرين باسم Exer-2 .

Age	56	42	72	36	63	47	55	49
Blood Pressure	147	125	160	118	149	128	150	145

مثل (10-3)

احسب معامل الارتباط بين الذكاء IQ والتحصيل في الرياضيات Mark وذلك بالاعتماد على الجدول التالي :

1- باستخدام معامل ارتباط بيرسون .

2- باستخدام معامل ارتباط سبيرمان .

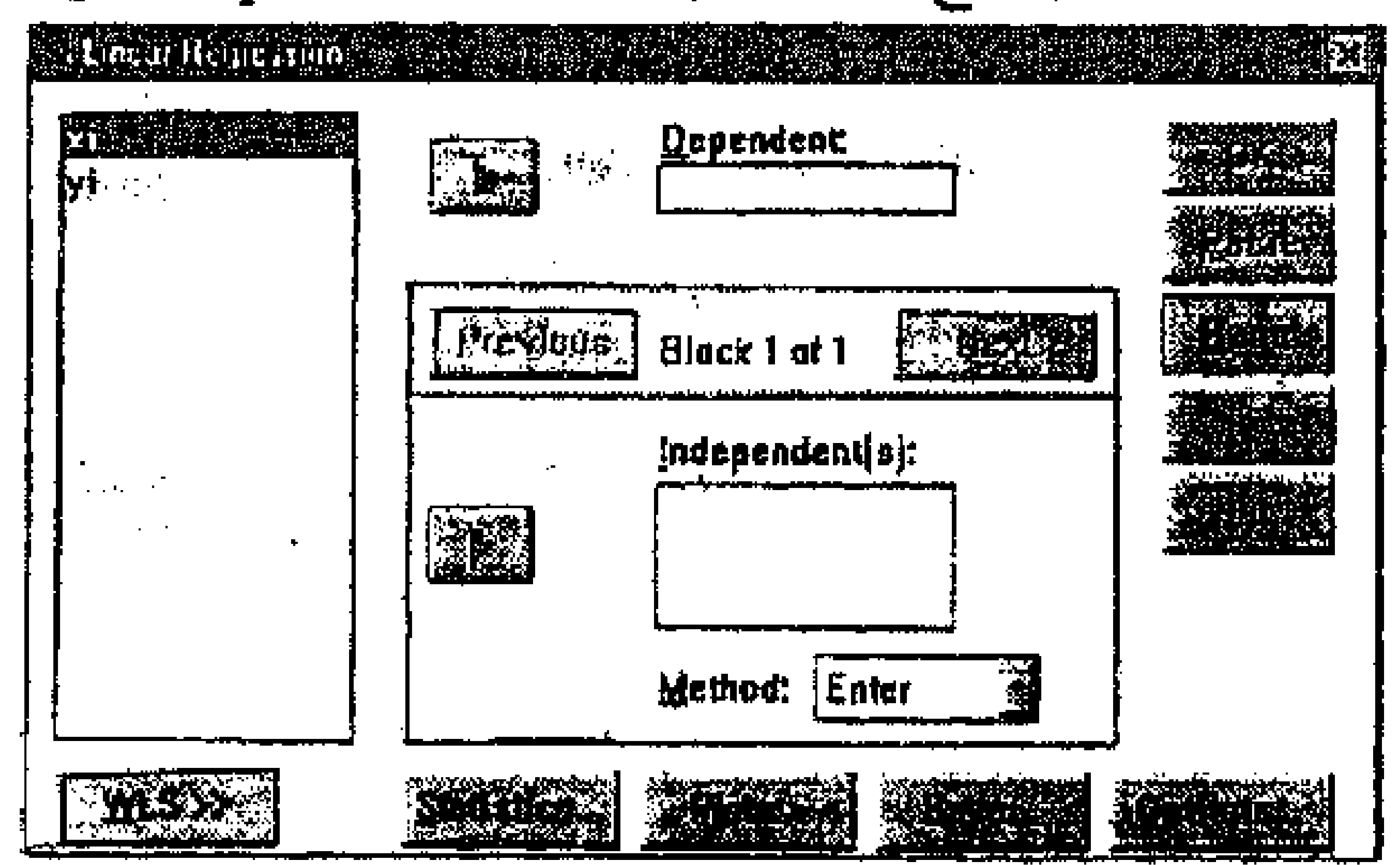
3- احفظ التمرين باسم Exer 3 .

IQ	110	120	103	100	130	115
Mark	80	70	40	50	95	85

10-19 معادلة الانحدار الخطي Linear Regression .

لإيجاد معادلة الانحدار الخطي اتبع الخطوات التالية :

1- اختر الأمر Regression من قائمة Statistics .ومن قائمة الفرعية انقر فوق الأمر Linear ليظهر مربع حوار Linear Regression كما في الشكل (10-24)



الشكل (10-24) مربع حوار Linear Regression

2- انقل المتغير التابع Dependent والمستقل إلى مربع Independent وذلك باستخدام الأسهم اعلاه .

3- انقر فوق Statistics فيظهر مربع حوار Linear Regression Statistics كما في الشكل (10-25)

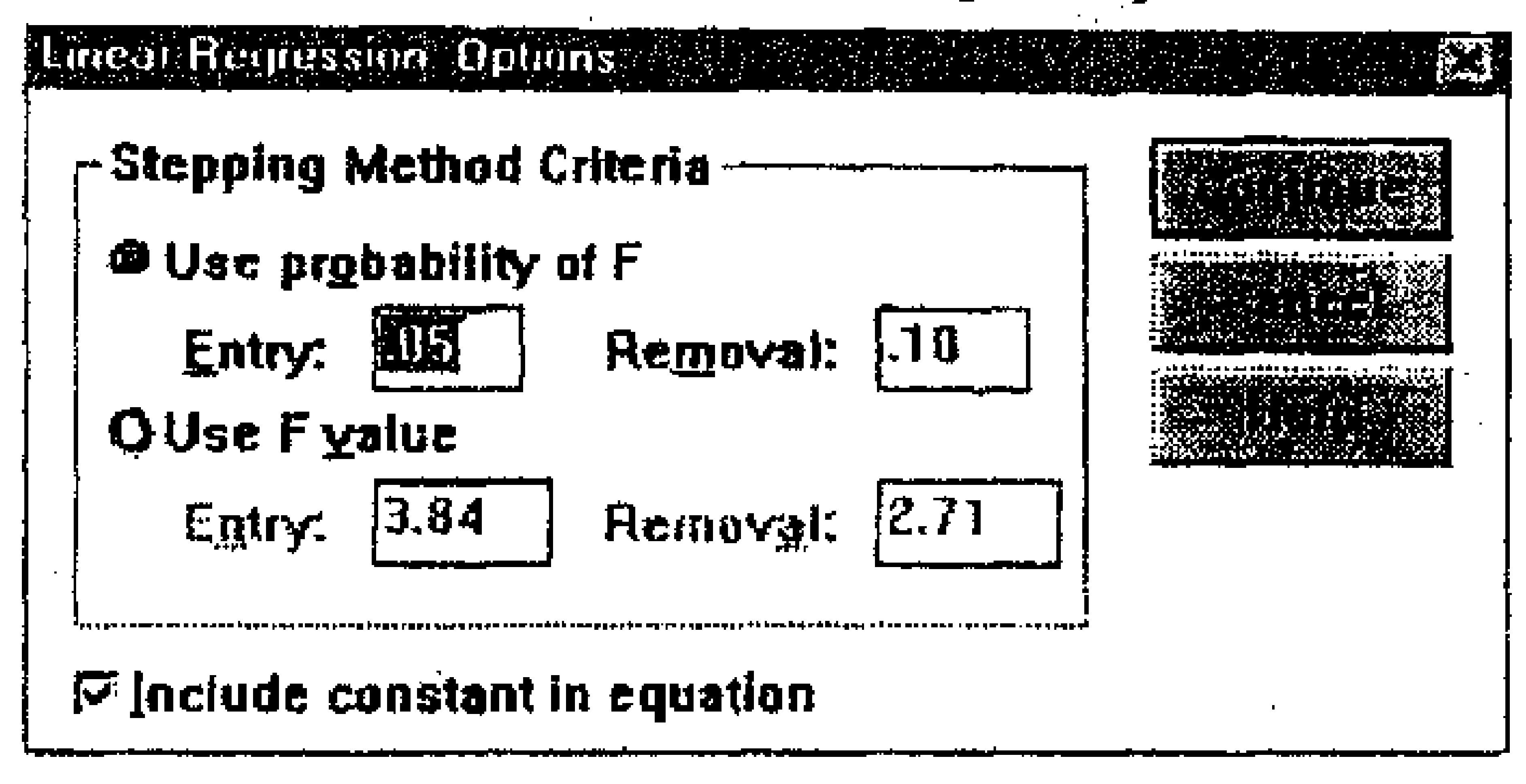
Linear Regression Statistics
Regression Coefficients
Estimates
Confidence intervals
Covariance matrix
Descriptives
Model fit
Block summary
Durbin-Watson
Collinearity diagnostics
Continue
Cancel
Help

الشكل (10-25) مربع Linear Regression Statistics

4- إذا اخترت Descriptive فهذا لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل متغير بالإضافة إلى مصفوفة الارتباط .

. (one tailed significance level and number of cases for each correlation)

5- اختر الأمر Options من الشاشة الأولى فيظهر مربع حوار Linear Options Regression كما في الشكل (10-26)



الشكل (10-26) مربع Linear Regression Options

6- إذا أردت المعادلة أن تظهر على الشاشة اختر الأمر Include constant in equation

7- انقر على OK وستظهر النتائج في شاشة المخرجات .

تمرين (10-4)

الجدول التالي يبين قيم المتغيرين Y,X .

X	70	60	70	80
Y	2	2	1	3

اعتمد ذلك لإيجاد :

1- معادلة الانحدار للتبوء بقيم Y إذا علمت X .

2- ارتباط بيرسون .

3- احفظ التمرين باسم Exer-4 بإتباع الطرق السابقة نحصل على معادلة الانحدار.

.Y=-1.50+0.05X

معامل ارتباط بيرسون يساوي (0.5) كما هو في شاشة المخرجات .

---------------- Variables in the Equation ----------------					
Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X	.050000	.061237	.500000	.816	.5000
(Constant)	-1.500000	4.308422		-.348	.7610

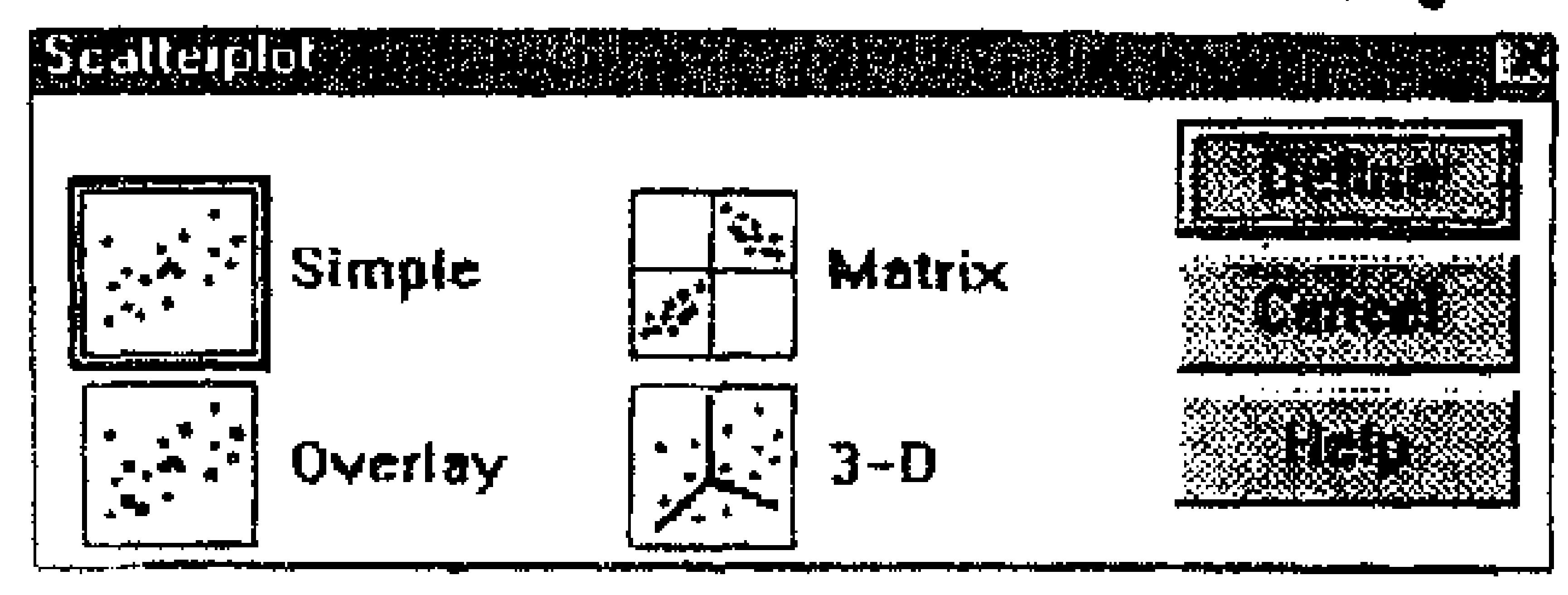
End Block Number 1 All requested variables entered.

X	Y
1.0000	.5000
(4)	(4)
P= .	P= .500
.5000	1.0000
(4)	(4)
P= .500	P= .

10-20 لتحديد شكل الانتشار Scatter

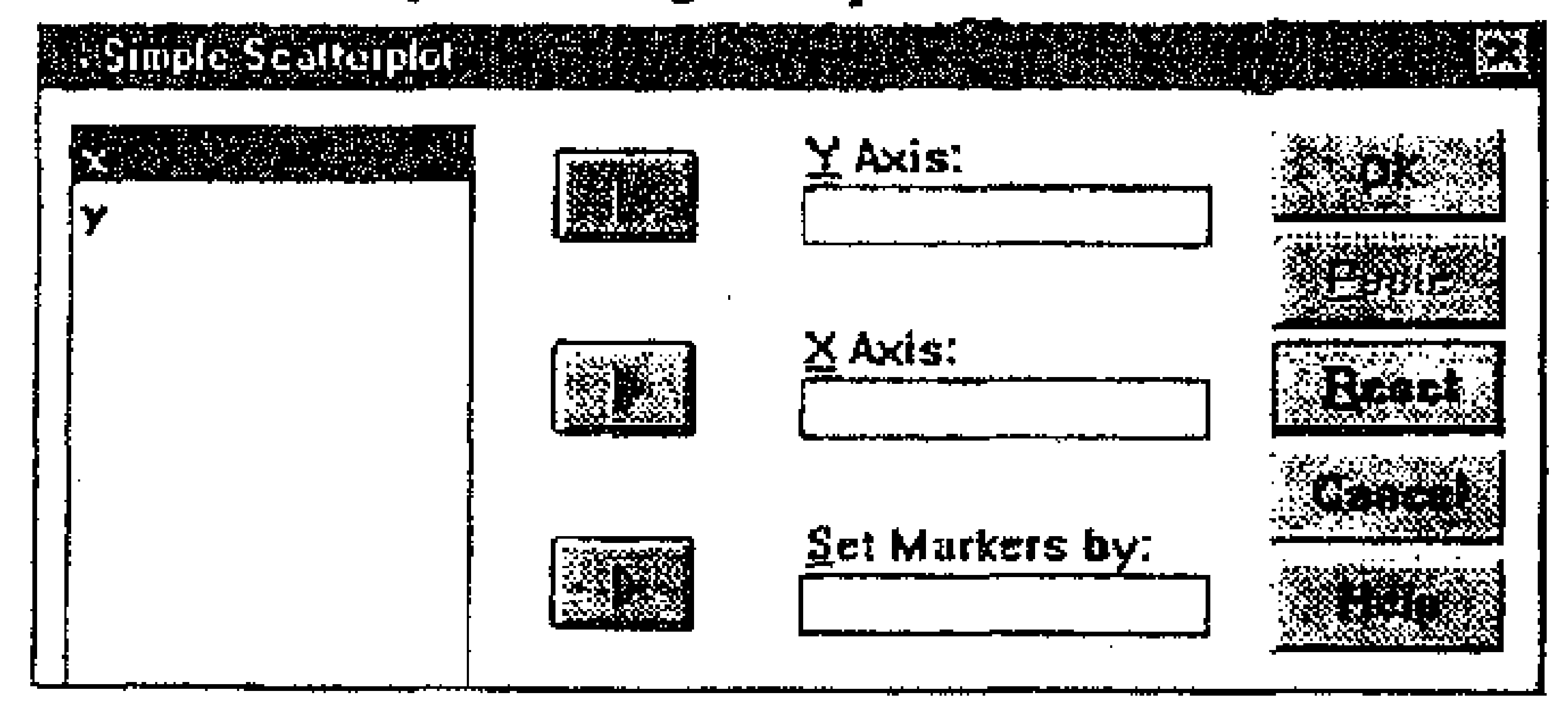
لتحديد شكل الانتشار افتح شاشة محرر البيانات واتبع ما يأتي :

1. أنقر فوق الأمر Scatter من قائمة Graph فتظهر مربع حوار Scatterplot كما في الشكل (10-27)



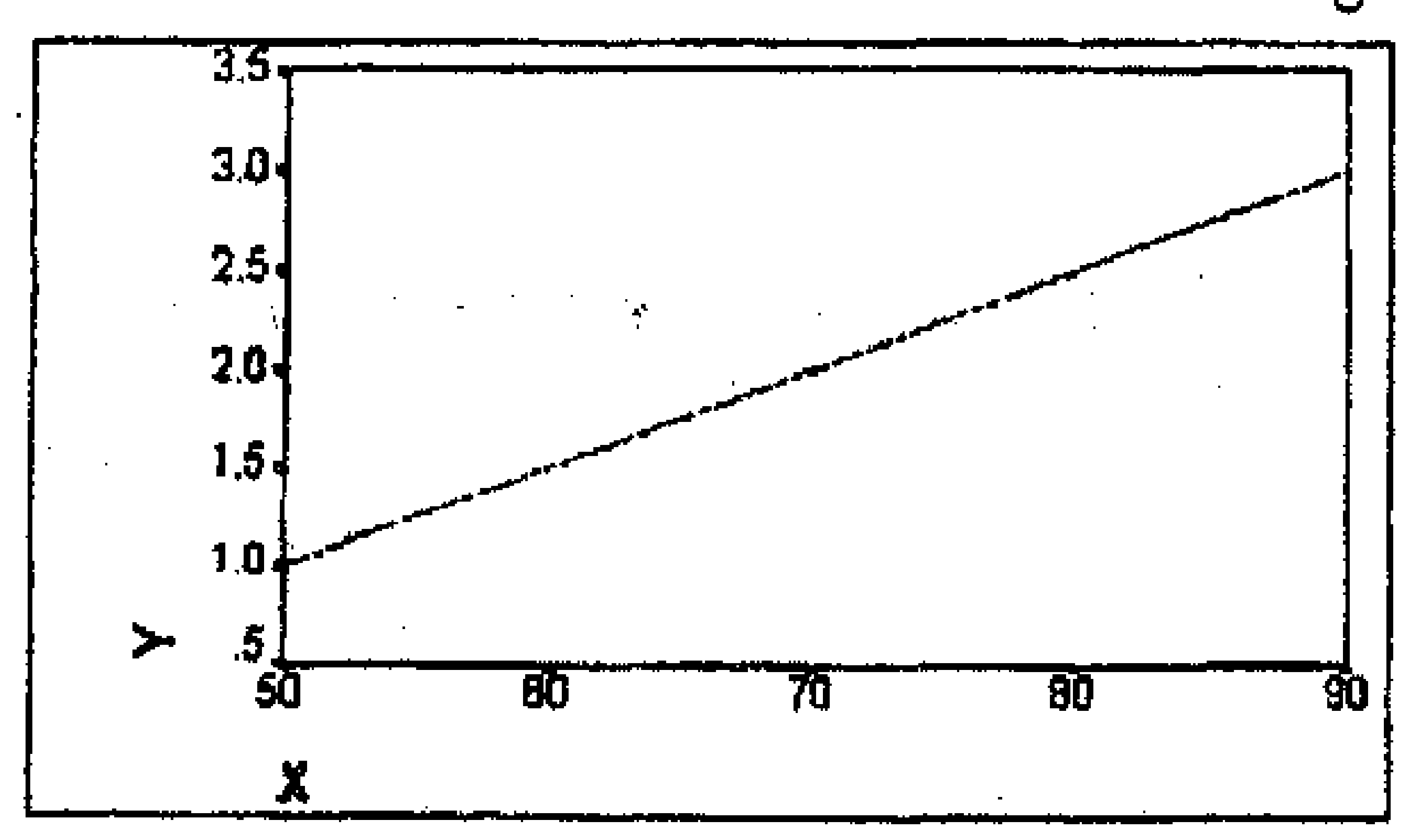
الشكل (10-27) مربع حوار Scatterplot

2. حدد نوع الانتشار الذي تريد وعادة تختار Simple ثم اختر Define فتظهر مربع حوار Simple Scatterplot كما في الشكل (10-28)



الشكل (10-28) مربع حوار Simple Scatterplot

3. حدد المتغيرات على المحاور ثم اختر موافق لتحصل على Chart counsel كما في الشكل (10-29)

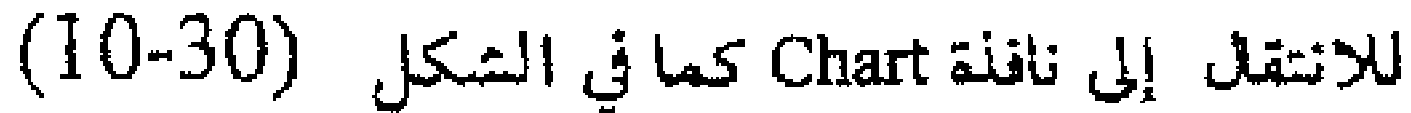


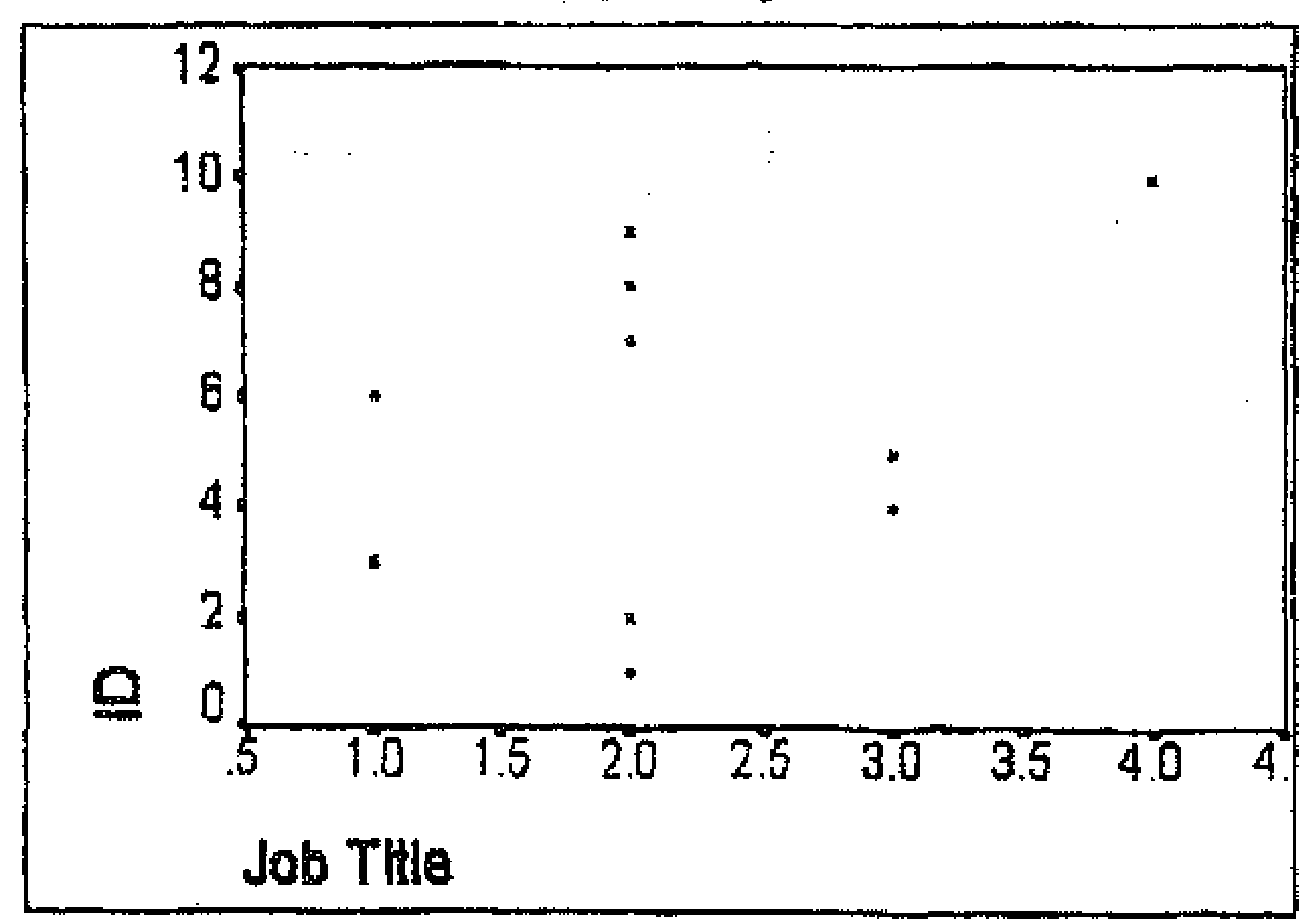
الشكل (10-29) شكل الانتشار في نافذة Chart coursel

10-21 إظهار خط الانحدار Showing Scatter Line

في العادة تحصل على النقاط الانتشار بدون خط الانحدار ولتوضيح كيفية إضافة خط الانحدار اتبع ما يلي :

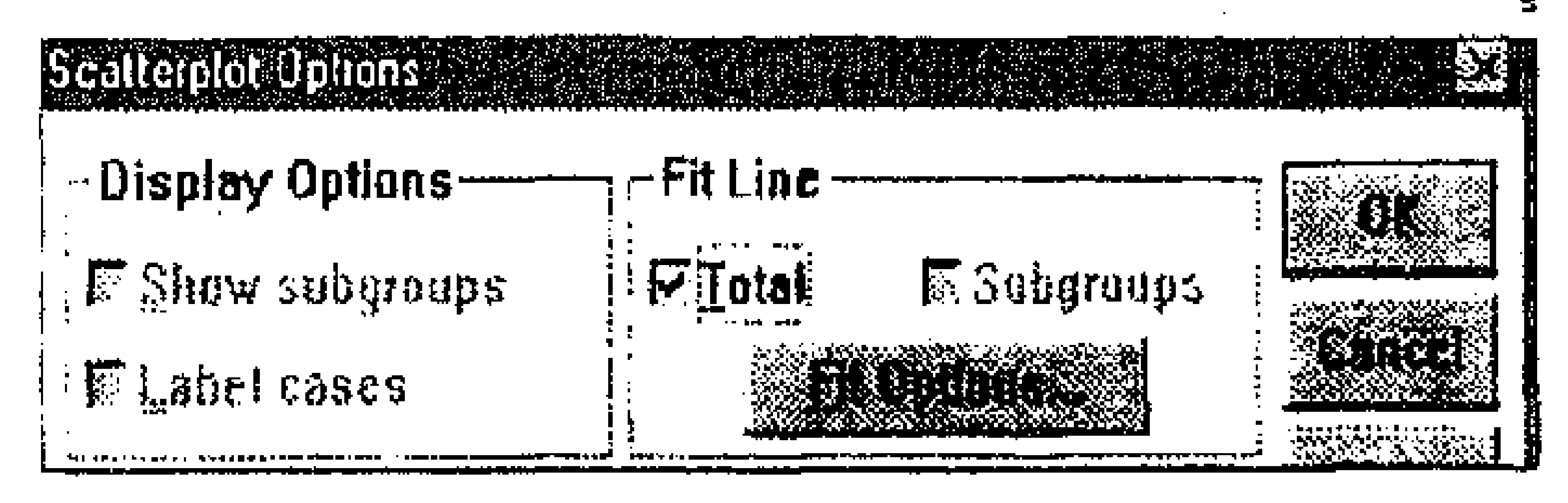
4. بعد إظهار نقاط الانتشار في شاشة Chart carousel. أنقر على الزر Edit


للانتقال إلى نافذة Chart كما في الشكل (10-30)



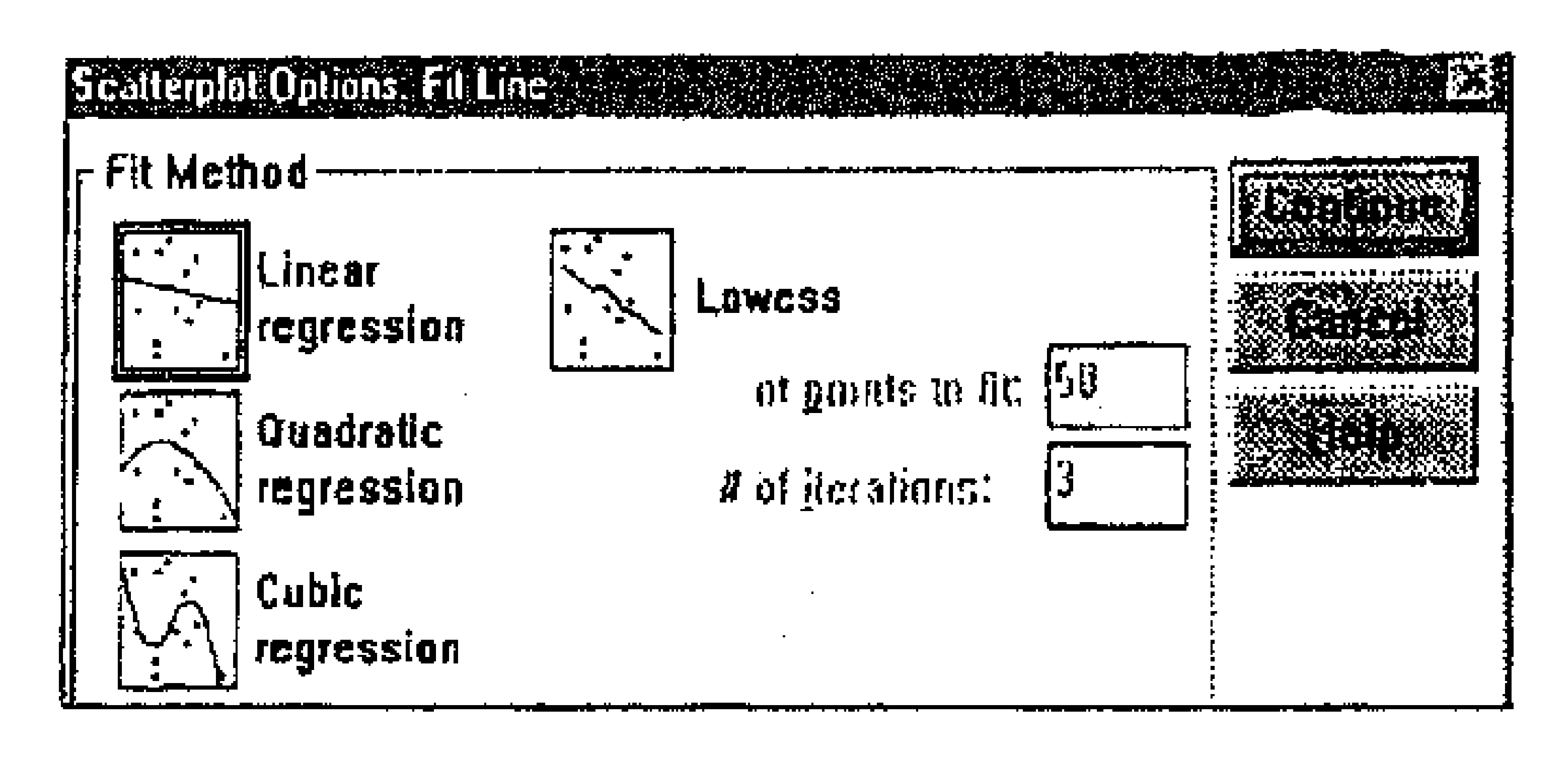
الشكل (10-30) نافذة Chart

1. أنقر فوق Options من قائمةChart فيظهر مربع حوار Scatter Options كما في (10-31)



الشكل (10-31) مربع حوار Scatter Options

2- من مربع Fit line اختر مربع Total ثم أنقر على المربع Fit Options ليظهر مربع حوار Fit Line كما في الشكل (10-32)



الشكل (10-32)، مربع حوار Fit Line

Z. distribution التوزيع الزائي

z	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
−3,5	0,00017	0,00017	0,00018	0,00019	0,00019	0,00020	0,00021	0,00022	0,00022	0,00023
−3,4	0,00024	0,00025	0,00026	0,00027	0,00028	0,00029	0,00030	0,00031	0,00033	0,00034
−3,3	0,00035	0,00036	0,00038	0,00039	0,00040	0,00042	0,00043	0,00045	0,00047	0,00048
−3,2	0,00050	0,00052	0,00054	0,00056	0,00058	0,00060	0,00062	0,00064	0,00066	0,00069
−3,1	0,00071	0,00074	0,00076	0,00079	0,00082	0,00085	0,00087	0,00090	0,00094	0,00097
−3,0	0,00100	0,00104	0,00107	0,00111	0,00114	0,00118	0,00122	0,00126	0,00131	0,00135
−2,9	0,0014	0,0014	0,0015	0,0015	0,0016	0,0016	0,0017	0,0017	0,0018	0,0019
−2,8	0,0019	0,0020	0,0021	0,0021	0,0022	0,0023	0,0023	0,0024	0,0025	0,0026
−2,7	0,0026	0,0027	0,0028	0,0029	0,0030	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034	0,0035
−2,6	0,0036	0,0037	0,0038	0,0039	0,0040	0,0041	0,0043	0,0044	0,0045	0,0047
−2,5	0,0048	0,0049	0,0051	0,0052	0,0054	0,0055	0,0057	0,0059	0,0060	[illegible]
−2,4	0,0064	0,0066	0,0068	0,0069	0,0071	0,0073	0,0075	0,0078	0,0080	[illegible]
−2,3	0,0084	0,0087	0,0089	0,0091	0,0094	0,0096	0,0099	0,0102	0,0104	0,0107
−2,2	0,0110	0,0113	0,0116	0,0119	0,0122	0,0125	0,0129	0,0132	0,0136	0,0139
−2,1	0,0143	0,0146	0,0150	0,0154	0,0158	0,0162	0,0166	0,0170	0,0174	0,0179
−2,0	0,0183	0,0188	0,0192	0,0197	0,0202	0,0207	0,0212	0,0217	0,0222	0,0228
−1,9	0,0233	0,0239	0,0244	0,0250	0,0256	0,0262	0,0268	0,0274	0,0281	0,0287
−1,8	0,0294	0,0301	0,0307	0,0314	0,0322	0,0329	0,0336	0,0344	0,0351	0,0359
−1,7	0,0367	0,0375	0,0384	0,0392	0,0401	0,0409	0,0418	0,0427	0,0436	0,0446
−1,6	0,0455	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0505	0,0516	0,0526	0,0537	0,0548
−1,5	0,0559	0,0571	0,0582	0,0594	0,0606	0,0618	0,0630	0,0643	0,0655	0,0668
−1,4	0,0681	0,0694	0,0708	0,0721	0,0735	0,0749	0,0764	0,0778	0,0793	[illegible]
−1,3	0,0823	0,0838	0,0853	0,0869	0,0885	0,0901	0,0918	0,0934	0,0951	[illegible]
−1,2	0,0985	0,1003	0,1020	0,1038	0,1057	0,1075	0,1093	0,1112	0,1131	0,1151
−1,1	0,1170	0,1190	0,1210	0,1230	0,1251	0,1271	0,1292	0,1314	0,1335	0,1357
−1,0	0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562	0,1587
−0,9	0,1611	0,1635	0,1660	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814	0,1841
−0,8	0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,2090	0,2119
−0,7	0,2148	0,2177	0,2207	0,2236	0,2266	0,2297	0,2327	0,2358	0,2389	0,2420
−0,6	0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709	0,2743
−0,5	0,2776	0,2810	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,3050	0,3085
−0,4	0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,3300	0,3336	0,3372	0,3409	0,3446
−0,3	0,3483	0,3520	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783	0,3821
−0,2	0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,4090	0,4129	0,4168	0,4207
−0,1	0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4404	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562	0,4602
−0,0	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960	0,5000

تابع التوزيع الزائي

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
+0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
+0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
+0,3	0,6179	0,6217	0,6233	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
+0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
+0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
+0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
+0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
+0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
+0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
+1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
+1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
+1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
+1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
+1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
+1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
+1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
+1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
+1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
+1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
+2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9793	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
+2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
+2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
+2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
+2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
+2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9961	0,9952
+2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
+2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
+2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
+2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
+3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
+3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99915	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
+3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
+3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
+3,4	0,99966	0,99967	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
+3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983

التوزيع التائي t-distribution

درجات الحرية	الاحتمال						
	70	80	90	95	97,5	99	99,5
1	,73	1,38	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
2	,62	1,06	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
3	,58	,98	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
4	,57	,94	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
5	,56	,92	1,48	2,01	2,57	3,36	4,03
6	,55	,91	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
7	,55	,90	1,42	1,90	2,36	3,00	3,50
8	,55	,89	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
9	,54	,88	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
10	,54	,88	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17
11	,54	,88	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
12	,54	,87	1,36	1,78	2,18	2,68	3,06
13	,54	,87	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
14	,54	,87	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98
15	,54	,87	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
16	,54	,86	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
17	,53	,86	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90
18	,53	,86	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88
19	,53	,86	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86
20	,53	,86	1,32	1,72	2,09	2,53	2,84
21	,53	,86	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
22	,53	,86	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82
23	,53	,86	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81
24	,53	,86	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80
25	,53	,86	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79
26	,53	,86	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78
27	,53	,86	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77
28	,53	,86	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76
29	,53	,85	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76
30	,53	,85	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75
40	,53	,85	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
50	,53	,85	1,30	1,67	2,01	2,40	2,68
60	,53	,85	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66
80	,53	,85	1,29	1,66	1,99	2,37	2,64
100	,53	,84	1,29	1,66	1,98	2,36	2,63
200	,52	,84	1,29	1,65	1,97	2,34	2,60
500	,52	,84	1,28	1,65	1,96	2,33	2,59
∞	,52	,84	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58

التوزيع الكائي X^2

	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	$0,0^3157$	$0,0^3628$	0,00393	0,0158	0,0642	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341	16,268
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

F. distribution التوزيع الفائي

درجة الحرية	$1-\alpha$	درجات الحرية											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	,75	5,83	7,50	8,20	8,58	8,82	8,98	9,10	9,19	9,26	9,32	9,36	9,41
	,90	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	58,9	59,4	59,9	60,2	60,5	60,7
	,95	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	,75	2,57	3,00	3,15	3,23	3,28	3,31	3,34	3,35	3,37	3,38	3,39	3,39
	,90	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,40	9,41
	,95	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
	,99	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4
3	,75	2,02	2,28	2,36	2,39	2,41	2,42	2,43	2,44	2,44	2,44	2,45	2,45
	,90	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,22
	,95	10,1	9,55	9,28	9,12	9,10	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74
	,99	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	27,1
4	,75	1,81	2,00	2,05	2,06	2,07	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08
	,90	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,91	3,90
	,95	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91
	,99	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,4
5	,75	1,69	1,85	1,88	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89
	,90	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,28	3,27
	,95	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,71	4,68
	,99	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,96	9,89
6	,75	1,62	1,76	1,78	1,79	1,79	1,78	1,78	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77
	,90	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,92	2,90
	,95	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
	,99	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	,75	1,57	1,70	1,72	1,72	1,71	1,71	1,70	1,70	1,69	1,69	1,69	1,68
	,90	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,68	2,67
	,95	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57
	,99	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47
8	,75	1,54	1,66	1,67	1,66	1,66	1,65	1,64	1,64	1,64	1,63	1,63	1,62
	,90	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,52	2,50
	,95	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
	,99	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67
9	,75	1,51	1,62	1,63	1,63	1,62	1,61	1,60	1,60	1,59	1,59	1,58	1,58
	,90	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38
	,95	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
	,99	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	,75	1,49	1,60	1,60	1,59	1,59	1,58	1,57	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54
	,90	3,28	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,30	2,28
	,95	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
	,99	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71
11	,75	1,47	1,58	1,58	1,57	1,56	1,55	1,54	1,53	1,53	1,52	1,52	1,51
	,90	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21
	,95	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
	,99	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	,75	1,46	1,56	1,56	1,55	1,54	1,53	1,52	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49
	,90	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,17	2,15
	,95	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
	,99	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16

تابع التوزيع الفائي

15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	α − 1	درجة الحرية
9,49	9.58	9,63	9,67	9,71	9,74	9,76	9,78	9,80	9,82	9,84	9,85	.75	1
61,2	61,7	62,0	62,3	62,5	62,7	62,8	63,0	63,1	63,2	63,3	63,3	.90	
246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	254	.95	
3,41	3,43	3,43	3,44	3,45	3,45	3,46	3,47	3,47	3,48	3,48	3,48	.75	2
9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,47	9,48	9,48	9,49	9,49	9,49	.90	
19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	.95	
99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	.99	
2,46	2,46	2,46	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	.75	3
5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,15	5,14	5,14	5,14	5,14	5,13	.90	
8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,57	8,55	8,55	8,54	8,53	8,53	.95	
26,9	26,7	26,6	26,5	26,4	26,4	26,3	26,2	26,2	26,2	26,1	26,1	.99	
2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	.75	4
3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,80	3,79	3,78	3,78	3,77	3,76	3,76	.90	
[illegible]	5,80	5,77	5,75	5,72	5,70	5,69	5,66	5,66	5,65	5,64	5,63	.95	
[illegible]	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,7	13,6	13,6	13,5	13,5	13,5	.99	
[illegible]	1,88	1,88	1,88	1,88	1,88	1,87	1,87	1,87	1,87	1,87	1,87	.75	5
3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,15	3,14	3,13	3,12	3,12	3,11	3,10	.90	
4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,43	4,41	4,40	4,39	4,37	4,36	.95	
9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,24	9,20	9,13	9,11	9,08	9,04	9,02	.99	
1,76	1,76	1,75	1,75	1,75	1,75	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	.75	6
2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,77	2,76	2,75	2,74	2,73	2,73	2,72	.90	
3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,74	3,71	3,70	3,69	3,68	3,67	.95	
7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,09	7,06	6,99	6,97	6,93	6,90	6,88	.99	
1,68	1,67	1,67	1,66	1,66	1,66	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	.75	7
2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,52	2,51	2,50	2,49	2,48	2,48	2,47	.90	
3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,30	3,27	3,27	3,25	3,24	3,23	.95	
6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,86	5,82	5,75	5,74	5,70	5,67	5,65	.99	
1,62	1,61	1,60	1,60	1,59	1,59	1,59	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	.75	8
2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,35	2,34	2,32	2,32	2,31	2,30	2,29	.90	
3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,02	3,01	2,97	2,97	2,95	2,94	2,93	.95	
5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,07	5,03	4,96	4,95	4,91	4,88	4,86	.99	
1,57	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54	1,54	1,53	1,53	1,53	1,53	1,53	.75	9
2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,22	2,21	2,19	2,18	2,17	2,17	2,16	.90	
3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,79	2,76	2,75	2,73	2,72	2,71	.95	
4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,52	4,48	4,42	4,40	4,36	4,33	4,31	.99	
1,53	1,52	1,52	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49	1,49	1,49	1,48	1,48	.75	10
2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,12	2,11	2,09	2,08	2,07	2,06	2,06	.90	
2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,62	2,59	2,58	2,56	2,55	2,54	.95	
4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,08	4,01	4,00	3,96	3,93	3,91	.99	
1,50	1,49	1,49	1,48	1,47	1,47	1,47	1,46	1,46	1,46	1,45	1,45	.75	11
2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,04	2,03	2,00	2,00	1,99	1,98	1,97	.90	
2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,51	2,49	2,46	2,45	2,43	2,42	2,40	.95	
4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,81	3,78	3,71	3,69	3,66	3,62	3,60	.99	
1,48	1,47	1,46	1,45	1,45	1,44	1,44	1,43	1,43	1,43	1,43	1,42	.75	12
2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94	1,93	1,92	1,91	1,90	.90	
2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,40	2,38	2,35	2,34	2,32	2,31	2,30	.95	
4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,57	3,54	3,47	3,45	3,41	3,38	3,36	.99	

تابع التوزيع الفائي

درجات الحرية	$1-\alpha$	درجات الحرية											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	.75	1,45	1,54	1,54	1,53	1,52	1,51	1,50	1,49	1,49	1,48	1,47	1,47
	.90	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,12	2,10
	.95	4,57	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60
	.99	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	.75	1,44	1,53	1,53	1,52	1,51	1,50	1,49	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45
	.90	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,08	2,05
	.95	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53
	.99	8,86	6,51	5,55	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	.75	1,43	1,52	1,52	1,51	1,49	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45	1,44	1,44
	.90	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02
	.95	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48
	.99	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	.75	1,42	1,51	1,51	1,50	1,48	1,48	1,47	1,46	1,45	1,45	1,44	1,44
	.90	3,05	2,57	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	2,01	1,99
	.95	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
	.99	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55
17	.75	1,42	1,51	1,50	1,49	1,47	1,46	1,45	1,44	1,43	1,43	1,42	1,41
	.90	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,98	1,96
	.95	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38
	.99	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46
18	.75	1,41	1,50	1,49	1,48	1,46	1,45	1,44	1,43	1,42	1,42	1,41	1,40
	.90	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,96	1,93
	.95	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34
	.99	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37
19	.75	1,41	1,49	1,49	1,47	1,46	1,44	1,43	1,42	1,41	1,41	1,40	1,40
	.90	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,94	1,91
	.95	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31
	.99	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30
20	.75	1,40	1,49	1,48	1,46	1,45	1,44	1,42	1,42	1,41	1,40	1,39	1,39
	.90	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,92	1,89
	.95	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28
	.99	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23
22	.75	1,40	1,48	1,47	1,45	1,44	1,42	1,41	1,40	1,39	1,39	1,38	1,37
	.90	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,88	1,86
	.95	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23
	.99	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12
24	.75	1,39	1,47	1,46	1,44	1,43	1,41	1,40	1,39	1,38	1,38	1,37	1,36
	.90	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,85	1,83
	.95	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18
	.99	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03
26	.75	1,38	1,46	1,45	1,44	1,42	1,41	1,40	1,39	1,37	1,37	1,36	1,35
	.90	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,84	1,81
	.95	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15
	.99	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96
28	.75	1,38	1,46	1,45	1,43	1,41	1,40	1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,34
	.90	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,81	1,79
	.95	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12
	.99	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90

تابع التوزيع الفائي

15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	$1-\alpha$	درجات الحرية
1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40	1.40	.75	
2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.90	1.88	1.88	1.86	1.85	1.85	.90	13
2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.30	2.26	2.25	2.23	2.22	2.21	.95	
3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.38	3.34	3.27	3.25	3.22	3.19	3.17	.99	
1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40	1.39	1.39	1.39	1.38	1.38	.75	
2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.87	1.86	1.83	1.83	1.82	1.80	1.80	.90	14
2.46	2.39	2.35	2.21	2.27	2.24	2.22	2.19	2.18	2.16	2.14	2.13	.95	
3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.22	3.18	3.11	3.09	3.06	3.03	3.00	.99	
1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.38	1.37	1.37	1.36	1.36	.75	
1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.79	1.77	1.76	1.76	.90	15
2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.16	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07	.95	
2.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.05	2.98	2.96	2.92	2.89	2.87	.99	
1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.37	1.36	1.35	1.35	1.35	1.34	1.34	.75	
1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.79	1.78	1.73	1.75	1.74	1.73	1.72	.90	16
2.32	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.11	2.07	2.06	2.04	2.02	2.01	.95	
3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.97	2.93	2.86	2.84	2.81	2.78	2.75	.99	
1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	1.34	1.33	1.33	.75	
1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.76	1.75	1.73	1.72	1.71	1.69	1.69	.90	17
2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.06	2.02	2.01	1.99	1.97	1.96	.95	
3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.87	2.83	2.76	2.75	2.71	2.68	2.65	.99	
1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.34	1.33	1.33	1.32	1.32	1.32	.75	
1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.74	1.72	1.70	1.69	1.68	1.67	1.66	.90	18
2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.98	1.97	1.95	1.93	1.92	.95	
3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.78	2.75	2.68	2.66	2.62	2.59	2.57	.99	
1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.32	1.31	1.31	1.30	.75	
1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.71	1.70	1.57	1.67	1.65	1.64	1.63	.90	19
2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.94	1.93	1.91	1.89	1.88	.95	
3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.71	2.67	2.60	2.58	2.55	2.51	2.49	.99	
1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	.75	
1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.69	1.68	1.65	1.64	1.63	1.52	1.51	.90	20
2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	.95	
3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.61	2.54	2.52	2.48	2.44	2.42	.99	
1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.30	1.29	1.29	1.28	.75	
1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	.90	22
2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.89	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78	.95	
2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.50	2.42	2.40	2.36	2.33	2.31	.99	
1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27	1.27	1.26	.75	
1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53	.90	24
2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73	.95	
2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.40	2.33	2.31	2.27	2.24	2.21	.99	
1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.28	1.26	1.26	1.26	1.25	1.25	.75	
1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.59	1.58	1.55	1.54	1.53	1.51	1.50	.90	26
2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.80	1.76	1.75	1.73	1.71	1.69	.95	
2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.36	2.33	2.25	2.23	2.19	2.16	2.13	.99	
1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.27	1.26	1.25	1.25	1.24	1.24	.75	
1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.57	1.56	1.53	1.52	1.50	1.49	1.48	.90	28
2.04	1.96	1.51	1.87	1.82	1.79	1.77	1.73	1.71	1.69	1.67	1.65	.95	
2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.26	2.19	2.17	2.13	2.09	2.06	.99	

تابع التوزيع الفائي

درجات الحرية	1−α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30	.75	1,38	1,45	1,44	1,42	1,41	1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,35	1,34
	.90	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,79	1,77
	.95	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09
	.99	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84
40	.75	1,36	1,44	1,42	1,40	1,39	1,37	1,36	1,35	1,34	1,33	1,32	1,31
	.90	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,73	1,71
	.95	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	[illegible]
	.99	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	[illegible]
	.75	1,35	1,42	1,41	1,38	1,37	1,35	1,33	1,32	1,31	1,30	1,29	[illegible]
	[illegible]	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,96	[illegible]	1,92
	.99	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	[illegible]	2,50
120	.75	1,34	1,40	1,39	1,37	1,35	1,33	1,31	1,30	1,29	1,28	1,27	1,26
	.90	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,62	1,60
	.95	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83
	.99	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34
200	.75	1,33	1,39	1,38	1,36	1,34	1,32	1,31	1,29	1,28	1,27	1,26	1,25
	.90	2,73	2,33	2,11	1,97	1,88	1,80	1,75	1,70	1,66	1,63	1,60	1,57
	.95	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80
	.99	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	[illegible]
∞	.75	1,32	1,39	1,37	1,35	1,33	1,31	1,29	1,28	1,27	1,25	1,24	1,24
	.90	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,57	1,55
	.95	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75
	.99	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18

تابع التوزيع الفائي

درجات الحرية													
15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	[illegible]	درجات الحرية
1,32	1,30	1,29	1,28	1,27	1,26	1,26	1,25	1,24	1,24	1,23	1,23	.75	
1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,55	1,54	1,51	1,50	1,48	1,47	1,46	.90	30
2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,74	1,70	1,68	1,66	1,64	1,62	.95	
2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,25	2,21	2,13	2,11	2,07	2,03	2,01	.99	
1,30	1,28	1,26	1,25	1,24	1,23	1,22	1,21	1,21	1,20	1,19	1,19	.75	
1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,48	1,47	1,43	1,42	1,41	1,39	1,38	.90	40
1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,64	1,59	1,58	1,55	1,53	1,51	.95	
2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,06	2,02	1,94	1,92	1,87	1,83	1,80	.99	
1,27	1,25	1,24	1,22	1,21	1,20	1,19	1,17	1,17	1,16	1,15	1,15	.75	
1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,41	1,40	1,36	1,35	1,33	1,31	1,29	.90	60
1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,53	1,48	1,47	1,44	1,41	1,39	.95	
2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,88	1,84	1,75	1,73	1,68	1,63	1,60	.99	
1,24	1,22	1,21	1,19	1,18	1,17	1,16	1,14	1,13	1,12	1,11	1,10	.75	
1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,34	1,32	1,27	1,26	1,24	1,21	1,19	.90	120
1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,46	1,43	1,37	1,35	1,32	1,28	1,25	.95	
2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,70	1,66	1,56	1,53	1,48	1,42	1,38	.99	
1,23	1,21	1,20	1,18	1,16	1,14	1,12	1,11	1,10	1,09	1,08	1,06	.75	
1,52	1,46	1,42	1,38	1,34	1,31	1,28	1,24	1,22	1,20	1,17	1,14	.90	200
1,72	1,62	1,57	1,52	1,46	1,41	1,39	1,32	1,29	1,26	1,22	1,19	.95	
2,13	1,97	1,89	1,79	1,69	1,63	1,58	1,48	1,44	1,39	1,33	1,28	.99	
1,22	1,19	1,18	1,16	1,14	1,13	1,12	1,09	1,08	1,07	1,04	1,00	.75	
1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,26	1,24	1,18	1,17	1,13	1,08	1,00	.90	∞
1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,32	1,24	1,22	1,17	1,11	1,00	.95	
2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,52	1,47	1,36	1,32	1,25	1,15	1,00	.99	

المراجع العربية

1) علم الإحصاء الوصفي المبرمج دعوض منصور و عزام صبري.
2) أساسيات علم الإحصاء الوصفي دعوض منصور -عزام صبري- دعلي قوقزة.
3) مبادئ الإحصاء عوض منصور و عزام صبري
4) الإحصاء في التربية عزام صبري وآخرون.
5) أسس علم الإحصاء عزام صبري وعلي أبو شرار



كتب تربوية
ابن عموش
Educational books
Telegram : t.me/edubook

الاحصاء التطبيقي
بنظام
SPSS







الدار المنهجية للنشر والتوزيع
عمان - شارع الملك حسين - مجمع الفحيص التجاري
تلفاكس: 4611169 6 962+
E-mail: info@Almanhajiah.com
ص. ب: 922762 عمان 11192 الأردن